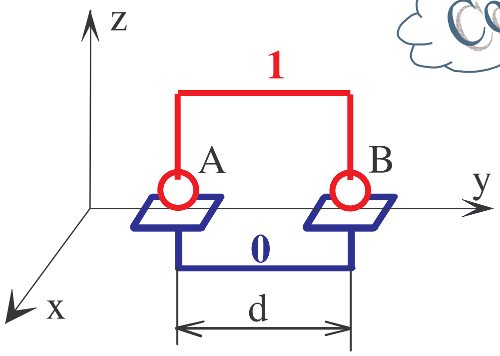
Corrigé

Liaisons équivalentes en parallèle
Résolution par la statique

On considère deux liaisons ponctuelles.



$$\{A0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{A,\ \vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}}$$

$$\{B0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{B,\ \vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}}$$

(Rem: Z_A et $Z_B > 0$)

Calculer le torseur en A de la liaison équivalente. En déduire le nom de cette liaison.

$$\vec{\mathcal{M}}_A B_{0\rightarrow 1} = \vec{\mathcal{M}}_B B_{0\rightarrow 1} + \vec{AB} \wedge \vec{\mathcal{R}} B_{0\rightarrow 1} = \vec{0} + d\vec{y} \wedge Z_B\vec{z} = d.Z_B\vec{x}$$

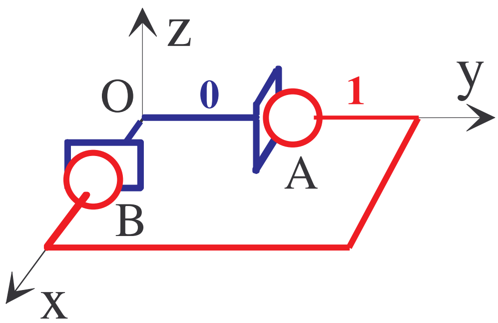
$$\Rightarrow \{B0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} 0 & dZ_B \\ 0 & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{A,\vec{x},\vec{y},\vec{z},} \quad \textit{s'écrit aussi} \quad \begin{Bmatrix} Z_B\vec{z} \\ dZ_B\vec{x} \end{Bmatrix}_A$$

On somme les deux torseurs exprimés au même point : {0 →1}= {A0 →1}+{B0→1}

$$\{0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} Z_A\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} Z_B\vec{z} \\ dZ_B\vec{x} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} (Z_A + Z_B)\vec{z} \\ dZ_B\vec{x} \end{Bmatrix}_A$$

Deux points définissent une droite. On propose donc une linéaire rectiligne de normale $\vec{z}$ et de ligne de contact (A, $\vec{y}$)
On valide le résultat obtenu puisque la liaison proposée transmet bien une composante de résultante suivant $\vec{z}$ et un moment autour d'un axe direction $\vec{x}$.

Soit deux liaisons ponctuelles de supports concourants en O, définies chacune par un glisseur



$$\{A0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O,\ \vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}}$$

$$\{B0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O,\ \vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}}$$

(Rem: Y_A et $X_B > 0$)

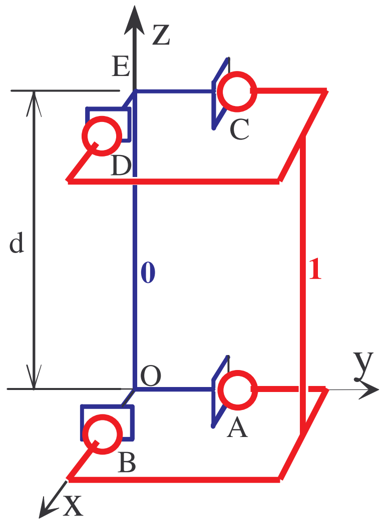
- Calculer le torseur en O de la liaison équivalente. En déduire le nom de cette liaison.

On somme les deux torseurs exprimés au même point : {0 →1}={A0 →1}+{B0→1}

$$\{0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} Y_A\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} X_B\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} X_B\vec{x} + Y_A\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

On reconnaît le torseur d'une liaison linéaire annulaire d'axe (0, $\vec{z}$) *et de centre O.*

Soit les quatre liaisons ponctuelles ci-contre.
- Calculer le torseur équivalent en O de la liaison.
- En déduire le nom de cette liaison.



On considère les deux liaisons en A et B qui constituent une linéaire annulaire d'axe O

$$\{AB0 \to 1\} = \begin{Bmatrix} Y_A\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} X_B\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} X_B\vec{x} + Y_A\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

On fait de même pour les deux actions du haut.

$$\{CD0 \to 1\} = \begin{Bmatrix} Y_C\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_E + \begin{Bmatrix} X_D\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_E = \begin{Bmatrix} X_D\vec{x} + Y_C\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_E$$

On transporte le moment en O :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O CD_{0\to 1}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_E CD_{0\to 1}} + \overrightarrow{OE} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R} CD_{0\to 1}} = \vec{0} + d\vec{z} \wedge (X_D\vec{x} + Y_C\vec{y}) = dX_D\vec{y} - dY_C\vec{x}$$

Le torseur exprimé de la liaison en O s'écrit $= \begin{Bmatrix} X_D\vec{x} + Y_C\vec{y} \\ -dY_C\vec{x} + dX_D\vec{y} \end{Bmatrix}_O$

On en déduit le torseur de la liaison équivalente :

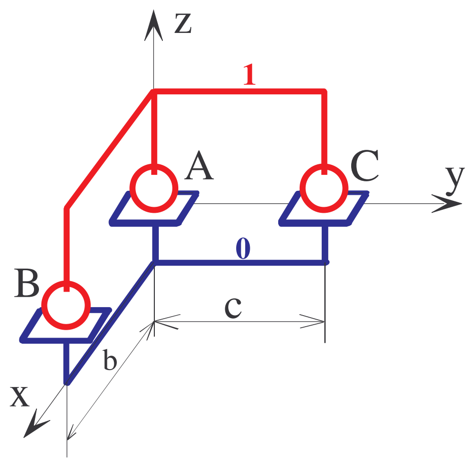
$$\{0 \to 1\} = \{AB0 \to 1\} + \{CD0 \to 1\} = \begin{Bmatrix} X_B\vec{x} + Y_A\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} X_D\vec{x} + Y_C\vec{y} \\ -dY_C\vec{x} + dX_D\vec{y} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} (X_B + X_D)\vec{x} + (Y_A + Y_C)\vec{y} \\ -dY_C\vec{x} + dX_D\vec{y} \end{Bmatrix}_O$$

Autre écriture : $\boxed{\{0 \to 1\} = \begin{Bmatrix} X_B + X_D & -dY_C \\ Y_A + Y_C & dX_D \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O,\vec{x},\vec{y},\vec{z},}}$

C'est une liaison pivot glissante d'axe $(O, \vec{z})$

On notera que pour valider la liaison pivot avec 4 degrés de liaison, il faut vérifier qu'il y a bien 4 variables indépendantes. Ici on a bien Y_A, X_B, Y_C *et* X_D .

Soit les trois liaisons ponctuelles définies ci-contre.
- Calculer le torseur en A de la liaison équivalente.
- En déduire le nom de cette liaison.



$$\{A0\to 1\} = \begin{Bmatrix} Z_A\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A ; \{B0\to 1\} = \begin{Bmatrix} Z_B\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B ; \{C0\to 1\} = \begin{Bmatrix} Z_C\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$$

On transporte les moments en A

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_A B_{0\to 1}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_B B_{0\to 1}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R} B_{0\to 1}} = \vec{0} + b\vec{x} \wedge Z_B\vec{z} = -b.Z_B\vec{y}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_A C_{0\to 1}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_C C_{0\to 1}} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R} C_{0\to 1}} = \vec{0} + c\vec{y} \wedge Z_C\vec{z} = c.Z_C\vec{x}$$

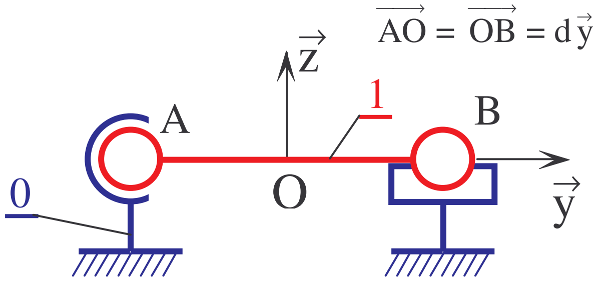
$$\Rightarrow \{B0\to 1\} = \begin{Bmatrix} Z_B\vec{z} \\ -bZ_B\vec{y} \end{Bmatrix}_A \quad et \quad \{C0\to 1\} = \begin{Bmatrix} Z_C\vec{z} \\ cZ_C\vec{x} \end{Bmatrix}_A$$

Le torseur équivalent devient : $\{0\to 1\} = \begin{Bmatrix} Z_A\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} Z_B\vec{z} \\ -bZ_B\vec{y} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} Z_C\vec{z} \\ cZ_C\vec{x} \end{Bmatrix}_A$

$$\boxed{\{0\to 1\} = \begin{Bmatrix} (Z_A + Z_B + Z_c)\vec{z} \\ cZ_c\vec{x} - bZ_B\vec{y} \end{Bmatrix}_A}$$

C'est le torseur d'un appui plan de normale parallèle à $\vec{z}$

Un guidage en rotation sur deux paliers.



est modélisé par le schéma ci-contre.
- Calculer le torseur en O de la liaison équivalente.
- De quelle liaison s'agit-il ?

$$\{A0\to1\} = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{A,\vec{x},\vec{y},\vec{z},} \quad ; \; \{B0\to1\} = \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{B,\vec{x},\vec{y},\vec{z},}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O}}A_{0\to1} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{A}}A_{0\to1} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}}A_{0\to1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -dZ_A \\ 0 \\ dX_A \end{pmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

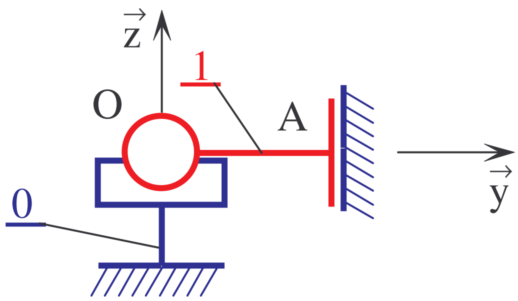
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O}}B_{0\to1} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{A}}B_{0\to1} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}}B_{0\to1} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_B \\ 0 \\ Z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dZ_B \\ 0 \\ -dX_B \end{pmatrix}_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}}$$

$$\{0\to1\} = \{A0\to1\} + \{B0\to1\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\{0\to1\} = \begin{Bmatrix} X_A + X_B & d(Z_B - Z_A) \\ Y_A & 0 \\ Z_A + Z_B & d(X_A - X_B) \end{Bmatrix}_{O,\vec{x},\vec{y},\vec{z},}}$$

$$\boxed{\textit{C'est une liaison pivot d'axe } (O,\ \vec{y}\,)}$$

Centrage court appui plan



Le centrage court encore appelé cylindre court permet deux rotations supplémentaires par rapport à un centrage long et correspond à une linaire annulaire. On l'associe fréquemment à un appui plan.
- Calculer le torseur en O de la liaison équivalente.
- De quelle liaison s'agit-il ?

Appui plan de normale $\vec{y}$: $\{A0\to1\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_A \\ Y_A & 0 \\ 0 & N_A \end{Bmatrix}_{A,\vec{x},\vec{y},\vec{z},}$ *Linéaire annulaire de centre O d'axe* $(O, \vec{y})$ $\{O0\to1\} = \begin{Bmatrix} X_O & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_O & 0 \end{Bmatrix}_{O,\vec{x},\vec{y},\vec{z},}$

On montre que $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O}}A_{0\to1} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{A}}A_{0\to1}$ *en effet* $\overrightarrow{OA}$ *est colinéaire à* $\overrightarrow{\mathcal{R}}A_{0\to1} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}}A_{0\to1} = \vec{0}$

$$\{0\to1\} = \{A0\to1\} + \{O0\to1\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_A \\ Y_A & 0 \\ 0 & N_A \end{Bmatrix}_{O,\vec{x},\vec{y},\vec{z},} + \begin{Bmatrix} X_O & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_O & 0 \end{Bmatrix}_{O,\vec{x},\vec{y},\vec{z},} \Rightarrow$$

$$\boxed{\{0\to1\} = \begin{Bmatrix} X_O & L_A \\ Y_A & 0 \\ Z_O & N_A \end{Bmatrix}_{O,\vec{x},\vec{y},\vec{z},}}$$

$$\boxed{\textit{C'est une liaison pivot d'axe } (O,\ \vec{y}\,)}$$