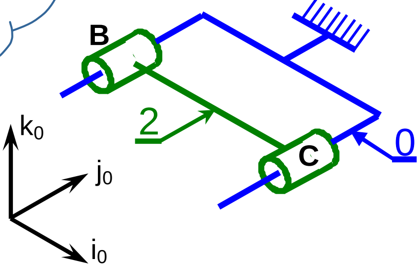
1 - MACHINE DE RADIOGRAPHIE EN TROIS DIMENSIONS

Corrigé



Première partie : liaison équivalente

Q1 Montrer par une étude cinématique que la liaison équivalente à l'association des deux liaisons L_{02}^{B} et L_{02}^{C} est une liaison glissière dont on précisera la direction de déplacement.

$$\left\{\mathcal{V}_{\substack{2/0\\L_B}}\right\} = {}_B\begin{Bmatrix}\beta_{B_{2/0}}\cdot\vec{j}_0\\ v_{B_{2/0}}\cdot\vec{j}_0\end{Bmatrix} \qquad \left\{\mathcal{V}_{\substack{2/0\\L_C}}\right\} = {}_C\begin{Bmatrix}\beta_{C_{2/0}}\cdot\vec{j}_0\\ v_{C_{2/0}}\cdot\vec{j}_0\end{Bmatrix}$$

$$\underset{(L_C)}{\overrightarrow{V(B,2/0)}} = \underset{(L_C)}{\overrightarrow{V(C,2/0)}} + \overrightarrow{BC}\wedge\underset{(L_C)}{\overrightarrow{\Omega_{2/0}}}$$

$$= v_{C_{2/0}}\cdot\vec{j}_0 + 2a\cdot\vec{i}_0\wedge\beta_{C_{2/0}}\cdot\vec{j}_0 = v_{C_{2/0}}\cdot\vec{j}_0 + 2a\cdot\beta_{C_{2/0}}\cdot\vec{k}_0$$

$$\Rightarrow \left\{\mathcal{V}_{\substack{2/0\\L_C}}\right\} = {}_B\begin{Bmatrix}\beta_{C_{2/0}}\cdot\vec{j}_0\\ v_{C_{2/0}}\cdot\vec{j}_0 + 2a\cdot\beta_{C_{2/0}}\cdot\vec{k}_0\end{Bmatrix}$$

On a des liaisons en parallèle $\Rightarrow \left\{\mathcal{V}_{éq\,2/0}\right\} = \left\{\mathcal{V}_{\substack{2/0\\L_B}}\right\} = \left\{\mathcal{V}_{\substack{2/0\\L_C}}\right\}$

$$\Rightarrow \left\{\mathcal{V}_{éq\,2/0}\right\} = {}_B\begin{Bmatrix}0 & 0\\ \beta_{B_{2/0}} = \beta_{C_{2/0}} & v_{B_{2/0}} = v_{C_{2/0}}\\ 0 & 2a\cdot\beta_{C_{2/0}} = 0\end{Bmatrix}_{B_0} = {}_B\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & v_{éq}\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{B_0} = {}_B\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ v_{éq}\cdot\vec{j}_0\end{Bmatrix}$$

On reconnaît le torseur cinématique d'une ***liaison glissière de direction*** $\vec{j}_0$.

Forme du système d'équations :

$N_c = 4$

$r_c = 3$ $\qquad$ $m_c = 1$

$m_u = 1$ $\qquad$ $m_i = 0$

3 équations « perdues »

$$E_c = 6\quad \begin{cases} h = 3 \begin{cases} 0 = 0\\ \beta_B - \beta_C = 0\\ 0 = 0\end{cases}\\ r_c = 3 \begin{cases} 0 = 0\\ v_B - v_C = 0\\ 2a\cdot\beta_C = 0\end{cases}\end{cases}$$

Le guidage en translation est hyperstatique d'ordre 3.

Q2 Par une étude de statique, déterminer le degré d'hyperstatisme h_1 de cette liaison. Quel est l'intérêt de ce choix de construction hyperstatique ?

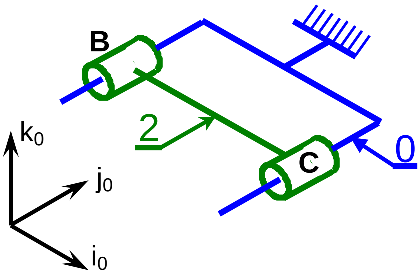
Etude avec les torseurs des actions transmissibles :

$$\left\{ 0 \underset{(L_B)}{\rightarrow} 2 \right\} = {}_B\begin{Bmatrix} X_B & L_B \\ 0 & 0 \\ Z_B & N_B \end{Bmatrix}_{B_0} \qquad \left\{ 0 \underset{(L_C)}{\rightarrow} 2 \right\} = {}_C\begin{Bmatrix} X_C & L_C \\ 0 & 0 \\ Z_C & N_C \end{Bmatrix}_{B_0}$$

$$\overrightarrow{M_{B\,0 \underset{L_C}{\rightarrow} 2}} = \overrightarrow{M_{C\,0 \underset{L_C}{\rightarrow} 2}} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{R_{0 \underset{L_C}{\rightarrow} 2}}$$

$$= L_C \cdot \vec{i}_0 + N_C \cdot \vec{k}_0 + 2a \cdot \vec{i}_0 \wedge (X_C \cdot \vec{i}_0 + Z_C \cdot \vec{k}_0)$$

$$= L_C \cdot \vec{i}_0 + N_C \cdot \vec{k}_0 - 2a \cdot Z_C \cdot \vec{j}_0$$



$$\left\{ 0 \underset{(L_C)}{\rightarrow} 2 \right\} = {}_B\begin{Bmatrix} X_C & L_C \\ 0 & -2a \cdot Z_C \\ Z_C & N_C \end{Bmatrix}_{B_0}$$

On a des liaisons en parallèle $\Rightarrow \left\{ 0 \underset{(L_{éq})}{\rightarrow} 2 \right\} = \left\{ 0 \underset{(L_B)}{\rightarrow} 2 \right\} + \left\{ 0 \underset{(L_C)}{\rightarrow} 2 \right\}$

$$\left\{ 0 \underset{(L_{éq})}{\rightarrow} 2 \right\} = {}_B\begin{Bmatrix} X_C + X_B & L_C + L_B \\ 0 & -2a \cdot Z_C \\ Z_C + Z_B & N_C + N_B \end{Bmatrix}_{B_0} = {}_B\begin{Bmatrix} X_{éq} & L_{éq} \\ 0 & M_{éq} \\ Z_{éq} & N_{éq} \end{Bmatrix}_{B_0}$$

On reconnaît le torseur des efforts transmissibles par une ***liaison glissière de direction*** $\vec{j}_0$.

Ns = 8 inconnues de liaisons

r_s=5 ***h=3***

Efforts extérieurs
Ils ne constituent pas des inconnues de liaison.

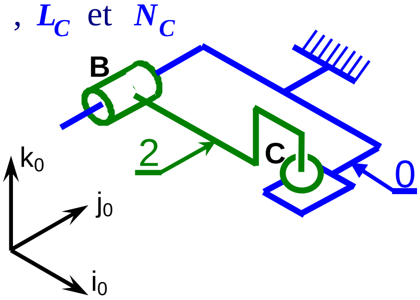
Es =6

$$\begin{array}{ll|ll} & m_c=1,\ r_s=5 & & \\ & X_C + X_B & +X_{ext} & = 0 \\ m_c=1 & 0 & +Y_{ext} & = 0 \\ & Z_C + Z_B & +Z_{ext} & = 0 \\ r_s=5 & L_C + L_B & +L_{ext} & = 0 \\ & -2a \cdot Z_C & +M_{ext} & = 0 \\ & N_C + N_B & +N_{ext} & = 0 \end{array}$$

1 équation « perdue »pour le calcul des inconnues de liaison.

On se donne les trois inconnues hyperstatiques. Par exemple : X_C , L_C et N_C

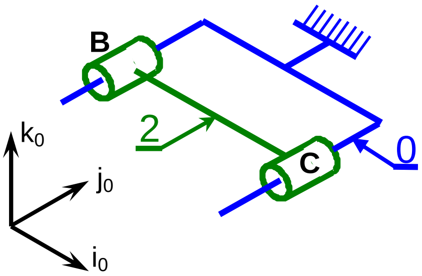
$$\left\{ 0 \underset{(L_C)}{\rightarrow} 2 \right\} = {}_C\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_C & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} = {}_C\begin{Bmatrix} Z_C \cdot \vec{k}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$



On obtient alors une solution isostatique avec pour L_C, une ***liaison ponctuelle de normale :*** $(C, \vec{k}_0)$.

Différents agencements de liaisons pour réaliser un guidage en translation.

Pour chaque configuration, donner le degré d'hyperstatisme ainsi que les conditions géométriques associées.



$N_s = 8$

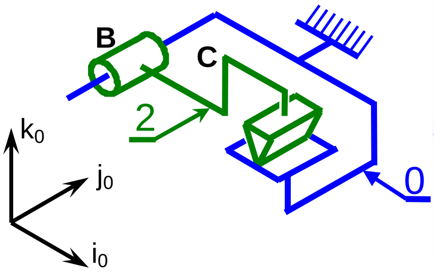
$r_s = 5$ $h = 3$

$E_s = 6$ $r_s = 5$ $m_c = 1$

$N_c = 4$

$r_c = 3$ $m_c = 1$

$E_c = 6$ $r_c = 3$ $h = 3$



$N_s = 6$

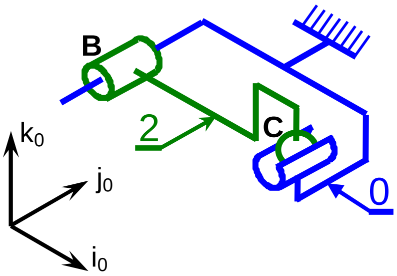
$r_s = 5$ $h = 1$

$E_s = 6$ $r_s = 5$ $m_c = 1$

$N_c = 6$

$r_c = 5$ $m_c = 1$

$E_c = 6$ $r_c = 5$ $h = 1$



$N_s = 6$

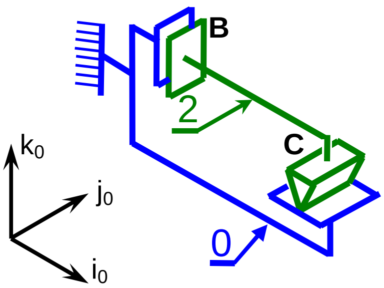
$r_s = 5$ $h = 1$

$E_s = 6$ $r_s = 5$ $m_c = 1$

$N_c = 6$

$r_c = 5$ $m_c = 1$

$E_c = 6$ $r_c = 5$ $h = 1$



$N_s = 5$

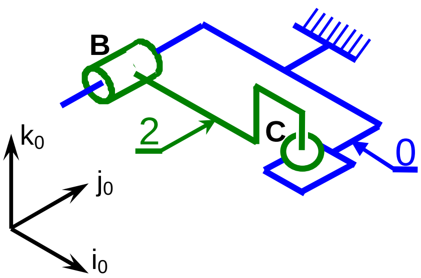
$r_s = 5$ $h = 0$

$E_s = 6$ $r_s = 5$ $m_c = 1$

$N_c = 7$

$r_c = 6$ $m_c = 1$

$E_c = 6$ $r_c = 6$ $h = 0$



$N_s = 5$

$r_s = 5$ $h = 0$

$E_s = 6$ $r_s = 5$ $m_c = 1$

$N_c = 7$

$r_c = 6$ $m_c = 1$

$E_c = 6$ $r_c = 6$ $h = 0$

Parallélisme de deux axes $\Rightarrow$ ajouter deux rotations : l'une / $\vec{i}_0$ et l'autre/ / $\vec{j}_0$
Distance entre les axes $\Rightarrow$ ajouter une translation sur $\vec{k}_0$
A chaque ddl ajouté, correspond une inconnue hyperstatique supprimée $\Rightarrow$ h= 3

Pour la linéaire rectiligne, on veut un parallélisme entre la droite et le plan
$\Rightarrow$ Il faut ajouter une rotation d'axe $(C,\vec{i}_0)$.

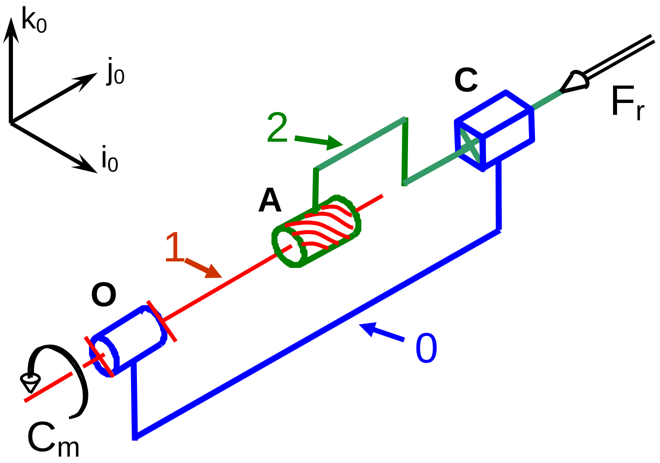
Pour pouvoir assembler la linéaire annulaire, la distance BC doit être la même sur les deux solides $\Rightarrow$ Il faut ajouter une translation sur $\vec{i}_0$.
A chaque ddl ajouté, correspond une inconnue hyperstatique supprimée $\Rightarrow$ h= 1

Les deux dernières solutions proposées sont isostatiques $\Leftrightarrow$ aucune condition géométrique n'est exigé.

Seconde partie : Etude de la chaîne fermée

Pour les études suivantes, on considère maintenant que la liaison L_{02} est une glissière isostatique.

Le modèle d'étude est donné par le schéma ci-contre :



Q3 Déterminer par une étude de cinématique la mobilité de la chaîne fermée [0-1-2-0]. Déduire de cette mobilité le degré d'hyperstatisme h_2 de la chaîne.

$$\left\{\mathcal{V}_{0/2}\right\} = {}_{\forall\ le\ pt}\left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ v_{0/2}\cdot\vec{j}_0 \end{matrix}\right\} \qquad \left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\} = {}_{O}\left\{\begin{matrix} \beta_{2/1}\cdot\vec{j}_0 \\ v_{2/1}\cdot\vec{j}_0 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\} = {}_{O}\left\{\begin{matrix} \beta_{1/0}\cdot\vec{j}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$

avec $v_{2/1} = \dfrac{pas\cdot\beta_{2/1}}{2\pi}$

Système d'équations :

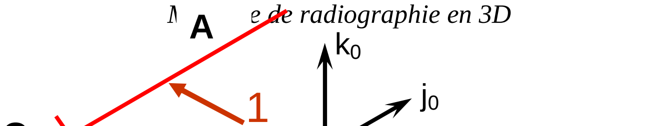
$$\overbrace{\underbrace{rc = 2}\quad \overbrace{\underbrace{mu = 1}\ \underbrace{mi = 0}}^{mc = 1}}^{Nc = 3}$$

$$Ec = 6\left[\begin{array}{ll} & \left[\ 0 = 0\right. \\ rc = 2 & \left[\ \beta_{2/1} + \beta_{1/0} = 0\right. \\ h = 4 & \left[\begin{array}{l} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ v_{2/0} - v_{2/1} = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

4 équations « perdues »

La chaine fermée ***hyperstique d'ordre 4*** *avec* ***une mobilité cinématique*** *et* ***sans mobilité interne***

Q4 Confirmer ce résultat par une étude de statique. Donner alors la forme que devrait avoir le torseur d'inter-effort de la liaison L_{21} pour que h_2 soit nul.



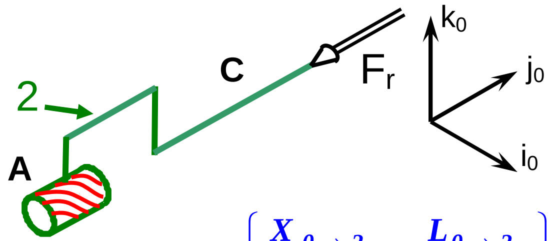
On isole le solide (S_1)

B.a.m.e. :

$$\left\{0 \rightarrow 1\right\} = {}_O\left\{\begin{array}{cc} X_{0\rightarrow 1} & L_{0\rightarrow 1} \\ Y_{0\rightarrow 1} & 0 \\ Z_{0\rightarrow 1} & N_{0\rightarrow 1} \end{array}\right\}_{B_0}$$

$$\left\{2 \rightarrow 1\right\} = {}_O\left\{\begin{array}{cc} -X_{1\rightarrow 2} & -L_{1\rightarrow 2} \\ -Y_{1\rightarrow 2} & -M_{1\rightarrow 2} \\ -Z_{1\rightarrow 2} & -N_{1\rightarrow 2} \end{array}\right\}_{B_0} \quad \text{Avec } M_{1\rightarrow 2} = \frac{-pas \cdot Y_{1\rightarrow 2}}{2\pi}$$

P.F.S. Voir le système d'équations ci-dessous.



On isole le solide (S_2)

B.a.m.e. :

$$\left\{1 \rightarrow 2\right\} = {}_O\left\{\begin{array}{cc} X_{1\rightarrow 2} & L_{1\rightarrow 2} \\ Y_{1\rightarrow 2} & M_{1\rightarrow 2} \\ Z_{1\rightarrow 2} & N_{1\rightarrow 2} \end{array}\right\}_{B_0} \qquad \left\{0 \rightarrow 2\right\} = {}_O\left\{\begin{array}{cc} X_{0\rightarrow 2} & L_{0\rightarrow 2} \\ 0 & M_{0\rightarrow 2} \\ Z_{0\rightarrow 2} & N_{0\rightarrow 2} \end{array}\right\}_{B_0}$$

P.F.S. Voir le système d'équations ci-dessous.

Ns = 15

rs = 11 — *h = 4*

Es = 12

mc = 1 (*mu = 1*, *mi = 0*)

$$\begin{cases} X_{0\rightarrow 1} - X_{1\rightarrow 2} + X_{ext} = 0 \\ Y_{0\rightarrow 1} - Y_{1\rightarrow 2} + Y_{ext} = 0 \\ Z_{0\rightarrow 1} - Z_{1\rightarrow 2} + Z_{ext} = 0 \\ L_{0\rightarrow 1} - L_{1\rightarrow 2} + L_{ext} = 0 \\ \dfrac{pas \cdot Y_{1\rightarrow 2}}{2\pi} + C_m = 0 \\ N_{0\rightarrow 1} - N_{1\rightarrow 2} + N_{ext} = 0 \end{cases}$$

rs = 11

$$\begin{cases} X_{1\rightarrow 2} + X_{0\rightarrow 2} + X'_{ext} = 0 \\ Y_{1\rightarrow 2} + F = 0 \\ Z_{1\rightarrow 2} + Z_{0\rightarrow 2} + Z'_{ext} = 0 \\ L_{1\rightarrow 2} + L_{0\rightarrow 2} + L'_{ext} = 0 \\ \dfrac{-pas \cdot Y_{1\rightarrow 2}}{2\pi} + M_{0\rightarrow 2} + M'_{ext} = 0 \\ N_{1\rightarrow 2} + N_{0\rightarrow 2} + N'_{ext} = 0 \end{cases}$$

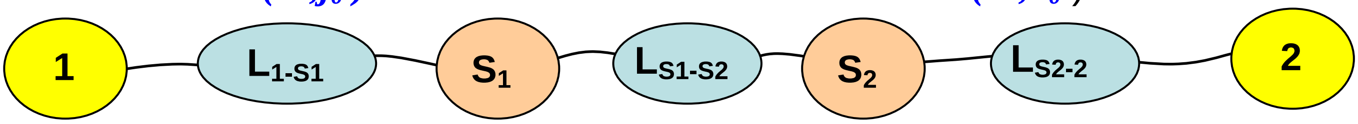
2 équations linéairement dépendantes

On voit que l'équation perdue permet, connaissant le couple moteur C_m appliqué en entrée, de déterminer la résultante de l'effort F fourni en sortie.
Les équations perdues pour le calcul des inconnues de liaisons, permettent de déterminer la relation entre l'entrée et la sortie du mécanisme.

Q5 Etablir la forme du torseur d'inter-effort de la liaison entre S1 et S2. En déduire le nom de la liaison

$L_{S2\text{-}S1}$.

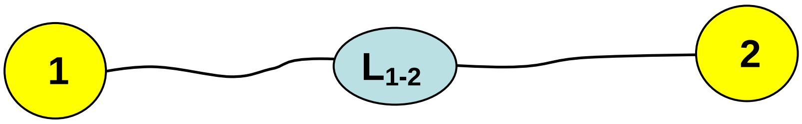
Hélicoïdale d'axe $(A,\vec{j}_0)$ ***Liaison ?*** ***P. Gl. d'axe $(A,\vec{k}_0)$***



Liées

$$ {}_{A}\left\{\begin{array}{cc} X_{1\to S_1} & L_{1\to S_1} \\ Y_{1\to S_1} & M_{1\to S_1} \\ Z_{1\to S_1} & N_{1\to S_1} \end{array}\right\}_{B_0} \quad {}_{A}\left\{\begin{array}{cc} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{array}\right\}_{B_0} \quad {}_{A}\left\{\begin{array}{cc} X_{S_2\to 2} & L_{S_2\to 2} \\ Y_{S_2\to 2} & M_{S_2\to 2} \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{B_0} $$

On cherche à avoir une liaisons équivalente de type hélicoïdale 1
Pour des liaisons en série, les torseurs des efforts transmissibles sont égaux entre eux



$$ {}_{A}\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_{1\to 2} & M_{1\to 2} \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{B_0} = $$

$$ {}_{A}\left\{\begin{array}{cc} X_{1\to S_1} & L_{1\to S_1} \\ Y_{1\to S_1} & M_{1\to S_1} \\ Z_{1\to S_1} & N_{1\to S_1} \end{array}\right\}_{B_0} = {}_{A}\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ ? & ? \\ ? & ? \end{array}\right\}_{B_0} = {}_{A}\left\{\begin{array}{cc} X_{S_2\to 2} & L_{S_2\to 2} \\ Y_{S_2\to 2} & M_{S_2\to 2} \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{B_0} $$

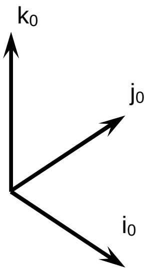
On voit que le torseur $\{S_1 \to S_2\}$ doit nécessairement faire apparaître deux composantes nulles :

$$ \left\{S_1 \to S_2\right\} = {}_{A}\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_{S_1\to S_2} & Y_{S_1\to S_2} \\ Z_{S_1\to S_2} & N_{S_1\to S_2} \end{array}\right\}_{B_0} $$

On reconnaît une liaison pivot-glissant d'axe $(A, \vec{j}_0)$

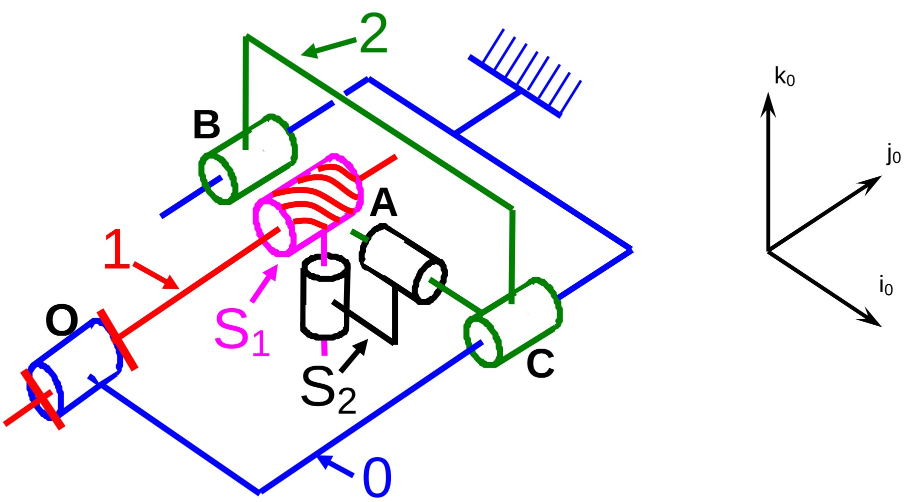
Attention, les autres inconnues du torseur doivent être non nulles sous peine de voir apparaître des mobilités inutiles voire pénalisantes pour le fonctionnement.

Q6 Tracer le schéma cinématique correspondant à la chaîne [0-1-S1-S2-2-0]



Q7 En prenant en compte la réalité de la liaison L_{02}, c'est-à-dire les liaisons L_{02}^{B} et L_{02}^{C}, quel est le degré d'hyperstatisme total de la chaîne [0-1-S1-S2-2-0] ?

Le schéma cinématique ci-dessous est composé d'une glissière hyperstatique d'ordre 3 et d'une chaîne fermée isostatique $\Rightarrow$ ***Globalement la solution est hyperstatique d'ordre 3.***



On vérifie avec les relations pour les chaînes complexes

$N_S = 5 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 26$

$E_S = 6 \cdot (5 - 1) = 24$

$m_C = 1$

$h = N_S - E_S + m_C$

$\boxed{\Rightarrow h = 26 - 24 + 1 = 3}$

$N_C = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 10$

$\gamma = n - b + 1 = 6 - 5 + 1 = 2$

$E_C = 6 \cdot \gamma = 12$

$h = E_C + N_C + m_C$

$\boxed{\Rightarrow h = 12 - 10 + 1 = 3}$