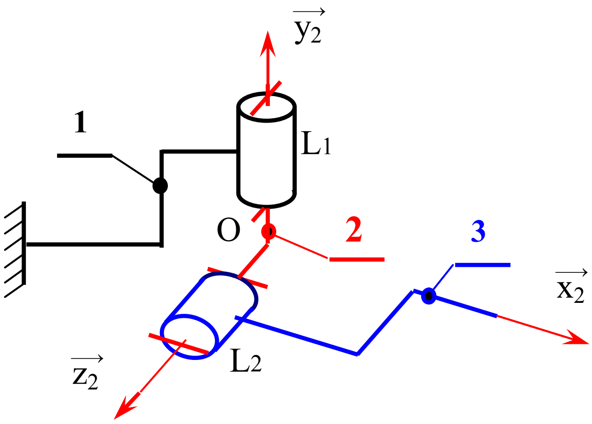
Corrigé

2- QUELQUES EXERCICES LIAISONS EN SERIE

Après avoir justifié le type de chaîne, déterminer la liaison équivalente par une étude statique puis par une étude cinématique. Rappeler quel est le degré d'hyperstatisme.

Exercice 2-1



Etude statique :

$$\left\{ \underset{(L_1)}{1 \rightarrow 2} \right\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} X_{1_{1\rightarrow 2}} & L_{1_{1\rightarrow 2}} \\ Y_{1_{1\rightarrow 2}} & 0 \\ Z_{1_{1\rightarrow 2}} & N_{1_{1\rightarrow 2}} \end{Bmatrix}_{B_2}$$

$$\left\{ \underset{(L_2)}{2 \rightarrow 3} \right\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} X_{2_{2\rightarrow 3}} & L_{2_{2\rightarrow 3}} \\ Y_{2_{2\rightarrow 3}} & M_{2_{2\rightarrow 3}} \\ Z_{2_{2\rightarrow 3}} & 0 \end{Bmatrix}_{B_2}$$

On a des liaisons en série $\Rightarrow \left\{ T_{eq}\ 1 \rightarrow 3 \right\} = \left\{ 1 \rightarrow 2 \right\} = \left\{ 2 \rightarrow 3 \right\}$

$$\Rightarrow \left\{ \underset{(L_{éq})}{1 \rightarrow 3} \right\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} X_1 = X_2 & L_1 = L_2 \\ Y_1 = Y_2 & 0 = M_2 \\ Z_1 = Z_2 & N_1 = 0 \end{Bmatrix}_{B_2} = {}_{O}\begin{Bmatrix} X_{éq} & L_{éq} \\ Y_{éq} & 0 \\ Z_{éq} & 0 \end{Bmatrix}_{B_2}$$

Etude cinématique :

$$\left\{ \underset{L_1}{\mathcal{V}_{2/1}} \right\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \beta_{1_{2/1}} \cdot \vec{y}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \qquad \left\{ \underset{L_2}{\mathcal{V}_{3/2}} \right\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \gamma_{2_{3/2}} \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

On a des liaisons en série $\Rightarrow \left\{ \mathcal{V}_{éq\ 3/1} \right\} = \left\{ \mathcal{V}_{3/2} \right\} + \left\{ \mathcal{V}_{2/1} \right\}$

$$\left\{ \mathcal{V}_{éq\ 3/1} \right\} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \beta_{1_{2/1}} \cdot \vec{y}_2 + \gamma_{2_{3/2}} \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \beta_{éq} \cdot \vec{y}_2 + \gamma_{éq} \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

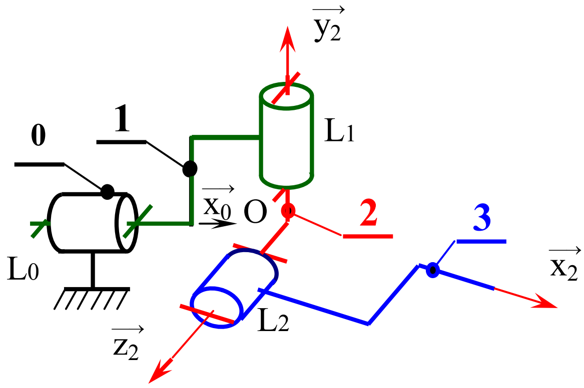
On reconnaît le torseur cinématique d'une ***liaison sphérique à doigt de centre O*** transmettant le mouvement sur l'axe $(O, \vec{x}_2)$.

On a une chaîne continue ouverte, ce schéma est donc ***isostatique.***

Exercice 2-2

Pour simplifier l'étude, on se place dans la configuration où $\vec{x}_2 = \vec{x}_0$.

Etude statique :



$$\left\{ \underset{(L_0)}{0 \uparrow 1} \right\} = {}_{O}\left\{ \begin{array}{cc} X_{0_{0\to 1}} & 0 \\ Y_{0_{0\to 1}} & M_{0_{0\to 1}} \\ Z_{0_{0\to 1}} & N_{0_{0\to 1}} \end{array} \right\}_{B_2}$$

$$\left\{ \underset{(L_1)}{1 \uparrow 2} \right\} = {}_{O}\left\{ \begin{array}{cc} X_{1_{1\to 2}} & L_{1_{1\uparrow 2}} \\ Y_{1_{1\uparrow 2}} & 0 \\ Z_{1_{1\uparrow 2}} & N_{1_{1\uparrow 2}} \end{array} \right\}_{B_2}$$

$$\left\{ \underset{(L_2)}{2 \uparrow 3} \right\} = {}_{O}\left\{ \begin{array}{cc} X_{2_{2\to 3}} & L_{2_{2\to 3}} \\ Y_{2_{2\to 3}} & M_{2_{2\to 3}} \\ Z_{2_{2\to 3}} & 0 \end{array} \right\}_{B_2}$$

On a des liaisons en série $\Rightarrow \left\{T_{eq}\ \ 0 \to 3\right\} = \left\{0 \to 1\right\} = \left\{1 \to 2\right\} = \left\{2 \to 3\right\}$

$$\Rightarrow \left\{ \underset{(L_{éq})}{0 \uparrow 3} \right\} = {}_{O}\left\{ \begin{array}{cc} X_{éq} & 0 \\ Y_{éq} & 0 \\ Z_{éq} & 0 \end{array} \right\}_{B_2}$$

Etude cinématique :

$$\left\{ \underset{L_0}{\mathcal{V}_{1/0}} \right\} = {}_{O}\left\{ \begin{array}{c} \alpha_{0_{1/0}} \cdot \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \qquad \left\{ \underset{L_1}{\mathcal{V}_{2/1}} \right\} = {}_{O}\left\{ \begin{array}{c} \beta_{1_{2/1}} \cdot \vec{y}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\} \qquad \left\{ \underset{L_2}{\mathcal{V}_{3/2}} \right\} = {}_{O}\left\{ \begin{array}{c} \gamma_{2_{3/2}} \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

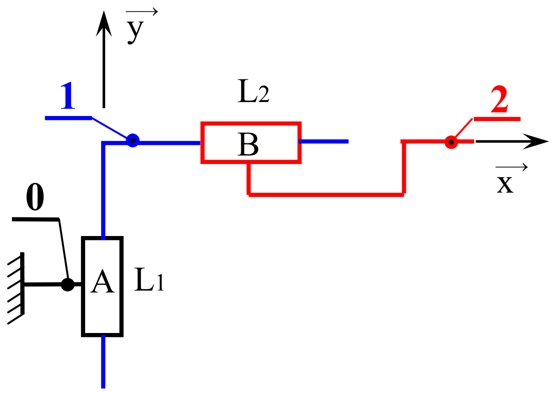
On a des liaisons en série $\Rightarrow \left\{\mathcal{V}_{éq\,3/0}\right\} = \left\{\mathcal{V}_{3/2}\right\} + \left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\} + \left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\}$

$$\left\{\mathcal{V}_{éq\,3/0}\right\} = {}_{O}\left\{ \begin{array}{c} \alpha_{0_{1/0}} \cdot \vec{x}_2 + \beta_{1_{2/1}} \cdot \vec{y}_2 + \gamma_{2_{3/2}} \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\} = {}_{O}\left\{ \begin{array}{cc} \alpha_{éq} & 0 \\ \beta_{éq} & 0 \\ \gamma_{éq} & 0 \end{array} \right\}_{B_2}$$

On reconnaît le torseur cinématique d'une ***liaison sphérique de centre O***.
On a une chaîne continue ouverte, ce schéma est donc ***isostatique.***

Exercice 2-3

Etude statique :



$$\left\{ \underset{(L_1)}{0 \uparrow 1} \right\} = \underset{\forall\, le\ pt}{} \begin{Bmatrix} X_{1_{0\to 1}} & L_{1_{0\to 1}} \\ 0 & M_{1_{0\to 1}} \\ Z_{1_{0\to 1}} & N_{1_{0\to 1}} \end{Bmatrix}_{B_0}$$

$$\left\{ \underset{(L_2)}{1 \uparrow 2} \right\} = \underset{\forall\, le\ pt}{} \begin{Bmatrix} 0 & L_{2_{1\to 2}} \\ Y_{2_{1\to 2}} & M_{2_{1\to 2}} \\ Z_{2_{1\to 2}} & N_{2_{1\to 2}} \end{Bmatrix}_{B_0}$$

On a des liaisons en série $\Rightarrow \{T_{eq}\ 0 \to 2\} = \{0 \to 1\} = \{1 \to 2\}$

$$\Rightarrow \left\{ \underset{(L_{éq})}{0 \uparrow 2} \right\} = \underset{\forall\, le\ pt}{} \begin{Bmatrix} 0 & L_{éq} \\ 0 & M_{éq} \\ Z_{éq} & N_{éq} \end{Bmatrix}_{B_0}$$

Le torseur des actions transmissibles par la liaison équivalente ressemble à celui d'un appui-plan de normale parallèle à $\vec{z}$ à ceci près que la composante $N_{éq}$ est non nulle.

Cette liaison ne figure pas au tableau des liaisons mais le solide S2 reste parallèle à lui-même au cours du mouvement. Il est donc animé d'un ***mouvement de translation*** (à trajectoire non définie).

De plus, il n'y a aucun déplacement sur l'axe $\vec{z}$, il s'agit donc d'un ***mouvement plan***.

Etude cinématique :

$$\left\{ \underset{L_1}{\mathcal{V}_{1/0}} \right\} = \underset{\forall\, le\ pt}{} \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ v_{1_{1/0}} \cdot \vec{y} \end{Bmatrix} \qquad \left\{ \underset{L_2}{\mathcal{V}_{2/1}} \right\} = \underset{\forall\, le\ pt}{} \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ u_{2_{2/1}} \cdot \vec{x} \end{Bmatrix}$$

On a des liaisons en série $\Rightarrow \{\mathcal{V}_{éq\ 2/0}\} = \{\mathcal{V}_{2/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/0}\}$

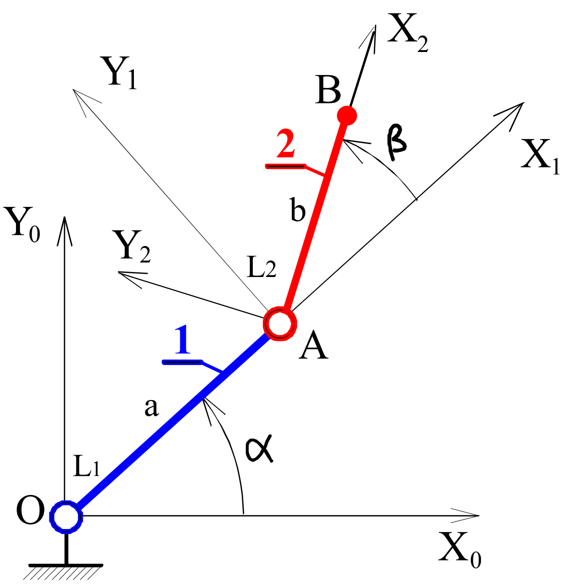
$$\Rightarrow \left\{ \underset{L_{éq}}{\mathcal{V}_{2/0}} \right\} = \underset{\forall\, le\ pt}{} \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ u_{2_{2/1}} \cdot \vec{x} + v_{1_{1/0}} \cdot \vec{y} \end{Bmatrix}$$

Cette liaison équivalente ne figure pas au tableau des liaisons. Le schéma est isostatique.

Elle s'apparente à une liaison appui-plan de normale $\vec{z}$ sauf qu'il manque une rotation sur un axe parallèle à $\vec{z}$.

Exercice 2-4

Etude statique :



$$\left\{ \underset{(L_1)}{0 \uparrow 1} \right\} = {}_O\left\{ \begin{matrix} X_{1_{0\to1}} & L_{1_{0\to1}} \\ Y_{1_{0\to1}} & M_{1_{0\to1}} \\ Z_{1_{0\to1}} & 0 \end{matrix} \right\}_{B_1}$$

$$\left\{ \underset{(L_2)}{1 \uparrow 2} \right\} = {}_A\left\{ \begin{matrix} X_{2_{1\to2}} & L_{2_{1\to2}} \\ Y_{2_{1\to2}} & M_{2_{1\to2}} \\ Z_{2_{1\to2}} & 0 \end{matrix} \right\}_{B_1}$$

Ecrivons la liaison équivalente en A

$$\overrightarrow{M_{A\,0\to1}} = \overrightarrow{M_{O\,0\to1}} + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{R_{0\to1}}$$

or $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{R_{0\to1}} = -a\cdot\vec{x}_1 \wedge (X_1\cdot\vec{x}_1 + Y_1\cdot\vec{y}_1 + Z_1\cdot\vec{z}) = -a\cdot Y_1\cdot\vec{z} + a\cdot Z_1\cdot\vec{y}_1$

$$\Rightarrow \left\{ \underset{(L_1)}{0 \uparrow 1} \right\} = {}_A\left\{ \begin{matrix} X_1 & L_1 \\ Y_1 & M_1 + a\cdot Z_1 \\ Z_1 & -a\cdot Y_1 \end{matrix} \right\}_{B_1}$$

On a des liaisons en série $\Rightarrow \{T_{eq}\ 0 \to 2\} = \{0 \to 1\} = \{1 \to 2\}$

$$\Rightarrow \left\{ \underset{(L_{éq})}{0 \uparrow 2} \right\} = {}_A\left\{ \begin{matrix} X_1 = X_2 & L_1 = L_2 \\ Y_1 = Y_2 & M_1 + a\cdot Z_1 = M_2 \\ Z_1 = Z_2 & -a\cdot Y_1 = 0 \end{matrix} \right\}_{B_1} = {}_A\left\{ \begin{matrix} X_{éq} & L_{éq} \\ 0 & M_{éq} \\ Z_{éq} & 0 \end{matrix} \right\}_{B_1}$$

Là encore, la liaison qui vient à l'esprit pour le mouvement de 2/0 est l'appui-plan de normale parallèle à $\vec{z}$ mais ici on observe une composante $X_{éq}$ en trop.
Cette liaison ne figure pas au tableau des liaisons.

Etude cinématique :

$$\left\{ \underset{L_1}{\mathcal{V}_{1/0}} \right\} = {}_O\left\{ \begin{matrix} \gamma_{1_{1/0}}\cdot\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} \qquad \left\{ \underset{L_2}{\mathcal{V}_{2/1}} \right\} = {}_A\left\{ \begin{matrix} \gamma_{2_{2/1}}\cdot\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}$$

$$\underset{(L1)}{\overrightarrow{V(A,1/0)}} = \underset{(L1)}{\overrightarrow{V(O,1/0)}} + \overrightarrow{AO} \wedge \underset{(L1)}{\overrightarrow{\Omega 1/0}}$$

$$= \vec{0} + -a\cdot\vec{x}_1 \wedge \gamma_{1_{1/0}}\cdot\vec{z} = a\cdot\gamma_{1_{1/0}}\cdot\vec{y}_1 \quad \Rightarrow \left\{ \underset{L_1}{\mathcal{V}_{1/0}} \right\} = {}_A\left\{ \begin{matrix} \gamma_1\cdot\vec{z} \\ a\cdot\gamma_1\cdot\vec{y}_1 \end{matrix} \right\}$$

On a des liaisons en série $\Rightarrow \{\mathcal{V}_{éq\,2/0}\} = \{\mathcal{V}_{2/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/0}\}$

$$\Rightarrow \left\{ \mathcal{V}_{éq_{2/0}} \right\} = {}_A\left\{ \begin{matrix} (\gamma_1 + \gamma_2)\cdot\vec{z} \\ a\cdot\gamma_1\cdot\vec{y}_1 \end{matrix} \right\}$$

Si on compare à la liaison appui-plan, on voit qu'il manque la composante de vitesse sur la direction $\vec{x}_1$.

Cette liaison ne figure pas au tableau des liaisons.
L'assemblage de deux liaisons en série est isostatique.