

Liaisons équivalentes en parallèle

Résolution par la statique

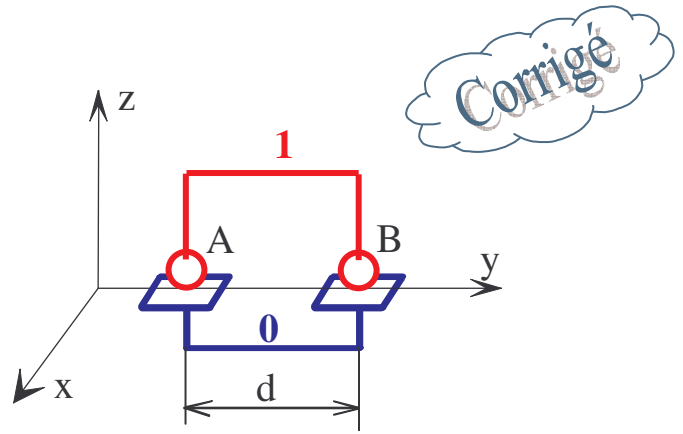
On considère deux liaisons ponctuelles.

$$\{A0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

$$\{B0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{B, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

(Rem: Z_A et $Z_B > 0$)

Calculer le torseur en A de la liaison équivalente. En déduire le nom de cette liaison.



$$\overline{\mathcal{M}}_{AB0 \rightarrow 1} = \overline{\mathcal{M}}_{B0 \rightarrow 1} + \overline{AB} \wedge \overline{\mathcal{R}}_{B0 \rightarrow 1} = \vec{0} + d\vec{y} \wedge Z_B\vec{z} = d.Z_B\vec{x}$$

$$\Rightarrow \{B0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} 0 & dZ_B \\ 0 & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}, \quad \text{s'écrit aussi } \begin{Bmatrix} Z_B\vec{z} \\ dZ_B\vec{x} \end{Bmatrix}_A$$

On somme les deux torseurs exprimés au même point : $\{0 \rightarrow 1\} = \{A0 \rightarrow 1\} + \{B0 \rightarrow 1\}$

$$\{0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} Z_A\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} Z_B\vec{z} \\ dZ_B\vec{x} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} (Z_A + Z_B)\vec{z} \\ dZ_B\vec{x} \end{Bmatrix}_A$$

Deux points définissent une droite. On propose donc une linéaire rectiligne de normale \vec{z} et de ligne de contact (A, \vec{y})

On valide le résultat obtenu puisque la liaison proposée transmet bien une composante de résultante suivant \vec{z} et un moment autour d'un axe direction \vec{x} .

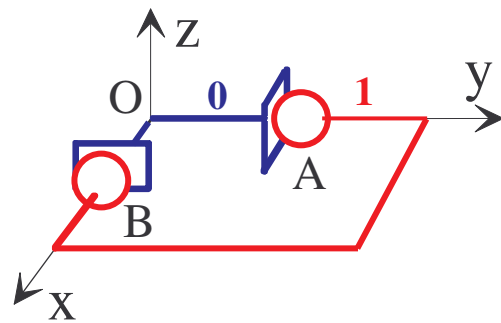
Soit deux liaisons ponctuelles de supports concourants en O, définies chacune par un glisseur

$$\{A0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

$$\{B0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

(Rem: Y_A et $X_B > 0$)

- Calculer le torseur en O de la liaison équivalente. En déduire le nom de cette liaison.



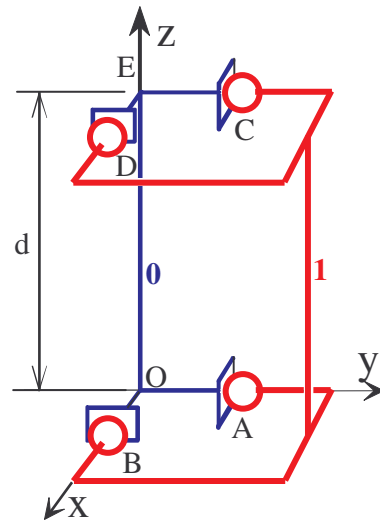
On somme les deux torseurs exprimés au même point : $\{0 \rightarrow 1\} = \{A0 \rightarrow 1\} + \{B0 \rightarrow 1\}$

$$\{0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} Y_A\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} X_B\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} X_B\vec{x} + Y_A\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

On reconnaît le torseur d'une liaison linéaire annulaire d'axe (O, \vec{z}) et de centre O.

Soit les quatre liaisons ponctuelles ci-contre.

- Calculer le torseur équivalent en O de la liaison.
- En déduire le nom de cette liaison.



On considère les deux liaisons en A et B qui constituent une linéaire annulaire d'axe O

$$\{AB0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} Y_A \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} X_B \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} X_B \vec{x} + Y_A \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

On fait de même pour les deux actions du haut.

$$\{CD0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} Y_C \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_E + \begin{Bmatrix} X_D \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_E = \begin{Bmatrix} X_D \vec{x} + Y_C \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_E$$

On transporte le moment en O :

$$\vec{M}_{OCD0 \rightarrow 1} = \vec{M}_{ECD0 \rightarrow 1} + \vec{OE} \wedge \vec{R}_{CD0 \rightarrow 1} = \vec{0} + d\vec{z} \wedge (X_D \vec{x} + Y_C \vec{y}) = dX_D \vec{y} - dY_C \vec{x}$$

$$\text{Le torseur exprimé de la liaison en O s'écrit} = \begin{Bmatrix} X_D \vec{x} + Y_C \vec{y} \\ -dY_C \vec{x} + dX_D \vec{y} \end{Bmatrix}_O$$

On en déduit le torseur de la liaison équivalente :

$$\{0 \rightarrow 1\} = \{AB0 \rightarrow 1\} + \{CD0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} X_B \vec{x} + Y_A \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O + \begin{Bmatrix} X_D \vec{x} + Y_C \vec{y} \\ -dY_C \vec{x} + dX_D \vec{y} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} (X_B + X_D) \vec{x} + (Y_A + Y_C) \vec{y} \\ -dY_C \vec{x} + dX_D \vec{y} \end{Bmatrix}_O$$

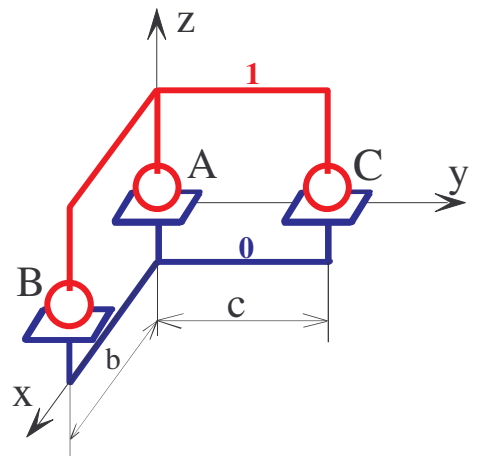
$$\text{Autre écriture : } \{0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} X_B + X_D & -dY_C \\ Y_A + Y_C & dX_D \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

C'est une liaison pivot glissante d'axe (O, \vec{z})

On notera que pour valider la liaison pivot avec 4 degrés de liaison, il faut vérifier qu'il y a bien 4 variables indépendantes. Ici on a bien Y_A, X_B, Y_C et X_D .

Soit les trois liaisons ponctuelles définies ci-contre.

- Calculer le torseur en A de la liaison équivalente.
- En déduire le nom de cette liaison.



$$\{A0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} Z_A \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A ; \{B0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} Z_B \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B ; \{C0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} Z_C \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$$

On transporte les moments en A

$$\vec{M}_{AB0 \rightarrow 1} = \vec{M}_{B0 \rightarrow 1} + \vec{AB} \wedge \vec{R}_{B0 \rightarrow 1} = \vec{0} + b\vec{x} \wedge Z_B \vec{z} = -b \cdot Z_B \vec{y}$$

$$\vec{M}_{AC0 \rightarrow 1} = \vec{M}_{C0 \rightarrow 1} + \vec{AC} \wedge \vec{R}_{C0 \rightarrow 1} = \vec{0} + c\vec{y} \wedge Z_C \vec{z} = c \cdot Z_C \vec{x}$$

$$\Rightarrow \{B0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} Z_B \vec{z} \\ -bZ_B \vec{y} \end{Bmatrix}_A \text{ et } \{C0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} Z_C \vec{z} \\ cZ_C \vec{x} \end{Bmatrix}_A$$

$$\text{Le torseur équivalent devient : } \{0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} Z_A \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} Z_B \vec{z} \\ -bZ_B \vec{y} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} Z_C \vec{z} \\ cZ_C \vec{x} \end{Bmatrix}_A$$

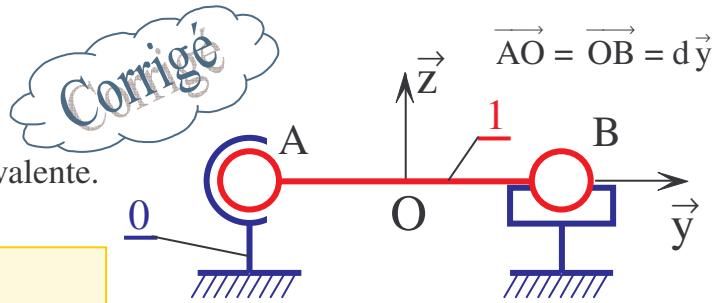
$$\{0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} (Z_A + Z_B + Z_C) \vec{z} \\ cZ_C \vec{x} - bZ_B \vec{y} \end{Bmatrix}_A$$

C'est le torseur d'un appui plan de normale parallèle à \vec{z}

Un guidage en rotation sur deux paliers.

est modélisé par le schéma ci-contre.

- Calculer le torseur en O de la liaison équivalente.
- De quelle liaison s'agit-il ?



$$\{A0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} ; \{B0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} X_B & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{B, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{OA0 \rightarrow 1} = \vec{\mathcal{M}}_{AA0 \rightarrow 1} + \vec{OA} \wedge \vec{\mathcal{R}}_{A0 \rightarrow 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -dZ_A \\ 0 \\ dX_A \end{pmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{OB0 \rightarrow 1} = \vec{\mathcal{M}}_{AB0 \rightarrow 1} + \vec{OB} \wedge \vec{\mathcal{R}}_{B0 \rightarrow 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_B \\ 0 \\ Z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dZ_B \\ 0 \\ -dX_B \end{pmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

$$\{0 \rightarrow 1\} = \{A0 \rightarrow 1\} + \{B0 \rightarrow 1\} \Rightarrow$$

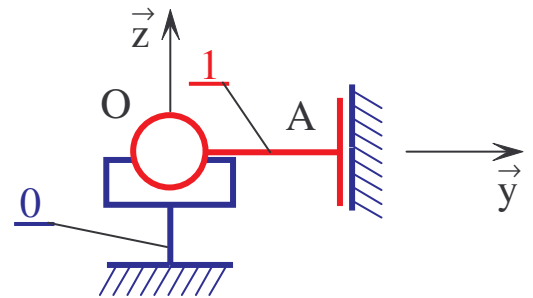
$$\{0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} X_A + X_B & d(Z_B - Z_A) \\ Y_A & 0 \\ Z_A + Z_B & d(X_A - X_B) \end{Bmatrix}_{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

C'est une liaison pivot d'axe (O, \vec{y})

Centrage court appui plan

Le centrage court encore appelé cylindre court permet deux rotations supplémentaires par rapport à un centrage long et correspond à une liaisons annulaire. On l'associe fréquemment à un appui plan.

- Calculer le torseur en O de la liaison équivalente.
- De quelle liaison s'agit-il ?



$$\text{Appui plan de normale } \vec{y} : \{A0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_A \\ Y_A & 0 \\ 0 & N_A \end{Bmatrix}_{A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \quad \text{Linéaire annulaire de centre O d'axe } (O, \vec{y}) \quad \{O0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} X_O & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_O & 0 \end{Bmatrix}_{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

On montre que $\vec{\mathcal{M}}_{OA0 \rightarrow 1} = \vec{\mathcal{M}}_{AA0 \rightarrow 1}$ en effet \vec{OA} est colinéaire à $\vec{\mathcal{R}}_{A0 \rightarrow 1} \Rightarrow \vec{OA} \wedge \vec{\mathcal{R}}_{A0 \rightarrow 1} = \vec{0}$

$$\{0 \rightarrow 1\} = \{A0 \rightarrow 1\} + \{O0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_A \\ Y_A & 0 \\ 0 & N_A \end{Bmatrix}_{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} + \begin{Bmatrix} X_O & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_O & 0 \end{Bmatrix}_{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} \Rightarrow$$

$$\{0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} X_O & L_A \\ Y_A & 0 \\ Z_O & N_A \end{Bmatrix}_{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

C'est une liaison pivot d'axe (O, \vec{y})

Guidage en translation

Le centrage long est associé à une ponctuelle.

Calculer le torseur de la liaison équivalente.

Liaison pivot glissant d'axe (B, \vec{y})

$$\{B0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} X_B & L_B \\ 0 & 0 \\ Z_B & N_B \end{Bmatrix}_{B, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

Ponctuelle de normale (A, \vec{z})

$$\{A0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

On transporte la ponctuelle en B

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{BA0 \rightarrow 1} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{AA0 \rightarrow 1} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}}_{A0 \rightarrow 1} = d \vec{x} \wedge Z_A \vec{z} = -dZ_A \vec{y}$$

On écrit la somme des torseurs :

$$\{0 \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} X_B & L_B \\ 0 & -dZ_A \vec{y} \\ Z_A + Z_B & N_B \end{Bmatrix}_{B, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$$

soit une liaison glissière de direction (B, \vec{y})

