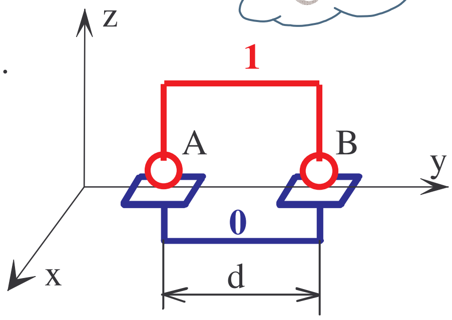
Corrigé

Liaisons équivalentes en parallèle
Résolution en cinématique

On considère deux liaisons ponctuelles de normales parallèles.
- Calculer le torseur en A de la liaison équivalente.
- En déduire le nom de cette liaison.



$$\left\{V_{1/0}^{L_A}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_A & u_A\\ \beta_A & v_A\\ \gamma_A & 0\end{Bmatrix}_{A,B_0}\qquad \left\{V_{1/0}^{L_B}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_B & u_B\\ \beta_B & v_B\\ \gamma_B & 0\end{Bmatrix}_{B,B_0}$$

$$\vec{V}A_{1/0}^{L_B}=\vec{V}B_{1/0}^{L_B}+\vec{A}B\wedge\vec{\Omega}_{1/0}^{L_B}=\begin{pmatrix}u_B\\ v_B\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ d\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\alpha_B\\ \beta_B\\ \gamma_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_B+d.\gamma_B\\ v_B\\ -d\alpha_B\end{pmatrix}$$

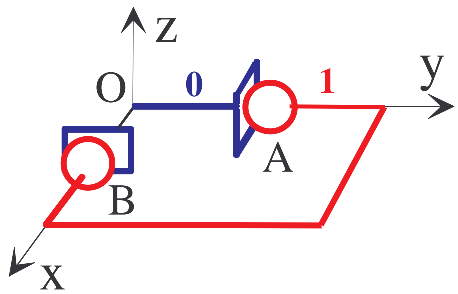
Le torseur équivalent est égal à chacun des torseurs cinématiques.

$$\left\{V_{1/0}^{L_{eq}}\right\}=\left\{V_{1/0}^{L_A}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_A & u_A\\ \beta_A & v_A\\ \gamma_A & 0\end{Bmatrix}_{A,B_0}=\left\{V_{1/0}^{L_B}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_B & u_B+d.\gamma_B\\ \beta_B & v_B\\ \gamma_B & -d\alpha_B\end{Bmatrix}_{A,B_0}$$

D'où : $$-d\alpha_B=0\Rightarrow\left\{V_{1/0}^{L_{eq}}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & u_{eq}\\ \beta_{eq} & v_{eq}\\ \gamma_{eq} & 0\end{Bmatrix}_{A,B_0}$$

C'est le torseur cinématique d'une liaison linéaire rectiligne de normale $(A,\vec{z})$ et de ligne de contact $(A,\vec{y})$.

Soit deux liaisons ponctuelles de normales concourantes en O.
(Rem: YA et XB >0)
- Calculer le torseur cinématique en O de la liaison équivalente.
- En déduire le nom de cette liaison.



$$\left\{V_{1/0}^{L_A}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_A & u_A\\ \beta_A & 0\\ \gamma_A & w_A\end{Bmatrix}_{A,B_0}\qquad \left\{V_{1/0}^{L_B}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_B & 0\\ \beta_B & v_B\\ \gamma_B & w_B\end{Bmatrix}_{B,B_0}$$

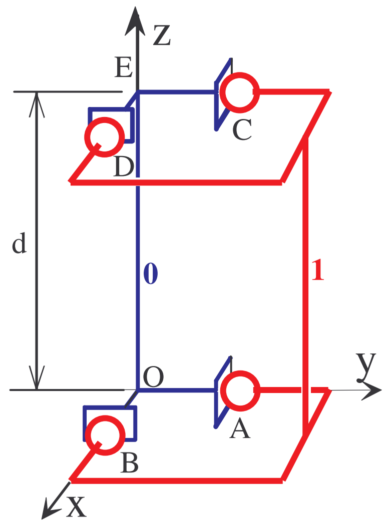
Ces deux torseurs sont inchangés si on les écrit en O.

On peut donc écrire l'égalité ce qui annule les composantes : $u_A=0$ *et* $v_B=0$

D'où : $$\left\{V_{1/0}^{L_{eq}}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_{eq} & 0\\ \beta_{eq} & 0\\ \gamma_{eq} & w_{eq}\end{Bmatrix}_{A,B_0}$$

On reconnaît le torseur d'une liaison linéaire annulaire d'axe $(O,\vec{z})$ et de centre O.

Soit les quatre liaisons ponctuelles ci-contre.
- Calculer le torseur équivalent en O de la liaison.
- En déduire le nom de cette liaison.



On utilise le résultat précédent pour reconnaître deux linéaires annulaires d'axe $(O,\vec{z})$. L'une est centrée en O l'autre est centrée en E.

Ecrivons les deux torseurs cinématiques

$$\left\{V_{1/0}^{L_O}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_O & 0\\ \beta_O & 0\\ \gamma_O & w_O\end{Bmatrix}_{O,B_0} \qquad \left\{V_{1/0}^{L_E}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_E & 0\\ \beta_E & 0\\ \gamma_E & w_E\end{Bmatrix}_{E,B_0}$$

Transportons en O le second torseur :

$$\vec{V}O_{1/0}^{L_E}=\vec{V}E_{1/0}^{L_E}+\vec{O}E\,\Lambda\,\vec{\Omega}_{1/0}^{L_E}=\begin{pmatrix}0\\0\\w_E\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\d\end{pmatrix}\Lambda\begin{pmatrix}\alpha_E\\ \beta_E\\ \gamma_E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-d\beta_E\\ d\alpha_E\\ w_E\end{pmatrix}$$

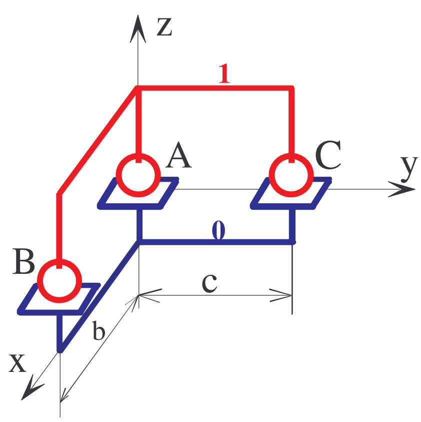
Si on écrit l'égalité des deux torseurs en O, on obtient $-d.\beta_E=0$ *et* $d.\alpha_E=0$

D'où : $$\left\{V_{1/0}^{L_{eq}}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ \gamma_{eq} & w_{eq}\end{Bmatrix}_{A,B_0}$$ *Il s'agit d'une liaison pivot glissant d'axe* $(O,\vec{z})$

Soit les trois liaisons ponctuelles définies ci-contre.
- Calculer le torseur en A de la liaison équivalente.
- En déduire le nom de cette liaison.

$$\left\{V_{1/0}^{L_A}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_A & u_A\\ \beta_A & v_A\\ \gamma_A & 0\end{Bmatrix}_{A,B_0} \qquad \left\{V_{1/0}^{L_B}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_B & u_B\\ \beta_B & v_B\\ \gamma_B & 0\end{Bmatrix}_{B,B_0} \qquad \left\{V_{1/0}^{L_C}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_C & u_C\\ \beta_C & v_C\\ \gamma_C & 0\end{Bmatrix}_{C,B_0}$$

On transporte les moments en A



$$\vec{V}A_{1/0}^{L_B}=\vec{V}B_{1/0}^{L_B}+\vec{A}B\,\Lambda\,\vec{\Omega}_{1/0}^{L_B}=\begin{pmatrix}u_B\\v_B\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b\\0\\0\end{pmatrix}\Lambda\begin{pmatrix}\alpha_B\\ \beta_B\\ \gamma_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_B\\ v_B-b\gamma_B\\ b\beta_B\end{pmatrix}$$

$$\vec{V}A_{1/0}^{L_C}=\vec{V}C_{1/0}^{L_C}+\vec{A}C\,\Lambda\,\vec{\Omega}_{1/0}^{L_C}=\begin{pmatrix}u_C\\v_C\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\c\\0\end{pmatrix}\Lambda\begin{pmatrix}\alpha_C\\ \beta_C\\ \gamma_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_C+c.\gamma_C\\ v_C\\ -c\alpha_C\end{pmatrix}$$

On en déduit $b\beta_B=0$ *et* $-c\alpha_C=0$.

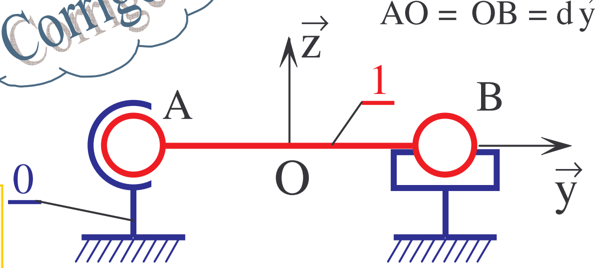
Les torseurs cinématiques sont égaux d'où $\beta_{eq}=\alpha_{eq}=0$

On en déduit : $$\left\{V_{1/0}^{L_{eq}}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & u_{eq}\\ 0 & v_{eq}\\ \gamma_{eq} & 0\end{Bmatrix}_{A,B_0}$$ *C'est le torseur d'un appui plan de normale parallèle à* $\vec{z}$.

Corrigé

Un guidage en rotation sur deux paliers.

est modélisé par le schéma ci-contre.
- Calculer le torseur en O de la liaison équivalente.
- De quelle liaison s'agit-il ?



$$\left\{V_{1/0}^{L_A}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_A & 0\\ \beta_A & 0\\ \gamma_A & 0\end{Bmatrix}_{A,B_0} \qquad \left\{V_{1/0}^{L_B}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_B & 0\\ \beta_B & v_B\\ \gamma_B & 0\end{Bmatrix}_{B,B_0}$$

On demande l'écriture des torseurs en O :

$$\vec{V}O_{1/0}^{L_A}=\vec{V}A_{1/0}^{L_A}+\vec{O}A\,\Lambda\,\vec{\Omega}_{1/0}^{L_A} \Rightarrow \qquad \vec{V}O_{1/0}^{L_B}=\vec{V}B_{1/0}^{L_B}+\vec{O}B\,\Lambda\,\vec{\Omega}_{1/0}^{L_B} \Rightarrow$$

$$\vec{V}O_{1/0}^{L_A}=\vec{0}+\begin{pmatrix}0\\-d\\0\end{pmatrix}\Lambda\begin{pmatrix}\alpha_A\\ \beta_A\\ \gamma_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-d\gamma_A\\0\\d\alpha_A\end{pmatrix} \qquad \vec{V}O_{1/0}^{L_B}=\begin{pmatrix}0\\v_B\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\d\\0\end{pmatrix}\Lambda\begin{pmatrix}\alpha_B\\ \beta_B\\ \gamma_B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d\gamma_B\\v_B\\-d\alpha_B\end{pmatrix}$$

Si on égalise les torseurs cinématiques, on trouve :

$\alpha_A=\alpha_B$ *et* $d\alpha_A=-d\alpha_B \Rightarrow \alpha_A=\alpha_B=0$

$\gamma_A=\gamma_B$ *et* $-d\gamma_A=d\gamma_B \Rightarrow \gamma_A=\gamma_B=0$

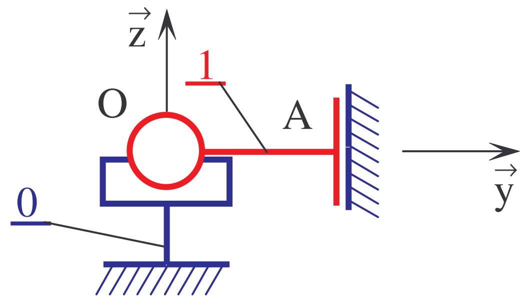
Enfin on voit que $v_B=0$ *et que seul* $\beta_A=\beta_B$ *est non nul.*

D'où : $\left\{V_{1/0}^{L_{eq}}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ \beta_{eq} & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{O,B_0}$

$\boxed{\text{On reconnaît le torseur d'une liaison pivot d'axe } (O,\vec{y})}$

Centrage court appui plan

Le centrage court encore appelé cylindre court permet deux rotations supplémentaires par rapport à un centrage long et correspond à une linaire annulaire. On l'associe fréquemment à un appui plan.
- Calculer le torseur en O de la liaison équivalente.
- De quelle liaison s'agit-il ?



$$\left\{V_{1/0}^{L_A}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & u_A\\ \beta_A & 0\\ 0 & w_A\end{Bmatrix}_{A,B_0} \qquad \left\{V_{1/0}^{L_O}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_O & 0\\ \beta_O & v_O\\ \gamma_O & 0\end{Bmatrix}_{O,B_0}$$

$$\vec{V}O_{1/0}^{L_A}=\vec{V}A_{1/0}^{L_A}+\vec{O}A\,\Lambda\,\vec{\Omega}_{1/0}^{L_A}=\begin{pmatrix}u_A\\0\\w_A\end{pmatrix}+d\,\vec{y}\,\Lambda\,\beta_A\,\vec{z}=\begin{pmatrix}u_A\\0\\w_A\end{pmatrix}$$

Le torseur de l'appui plan a donc la même expression en A et en O.

Si on égalise les torseurs cinématiques, on trouve :

$\alpha_O=0 \quad \gamma_O=0 \quad u_A=0 \quad v_O=0 \quad w_A=0$

Là encore, seul $\beta_O=\beta_A$ *est non nul.*

D'où : $\left\{V_{1/0}^{L_{eq}}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ \beta_{eq} & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{O,B_0}$

$\boxed{\textit{Il s'agit donc d'une liaison pivot d'axe } (O,\vec{y})}$

Guidage en translation

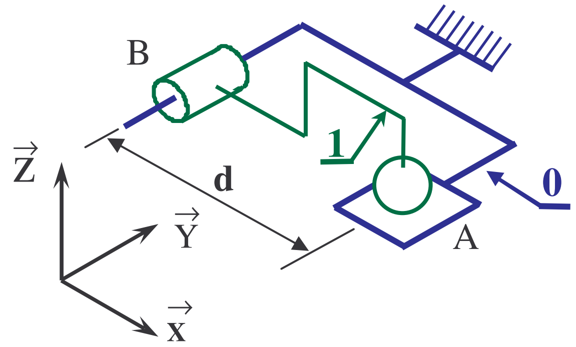
Le centrage long est associé à une ponctuelle.
Calculer le torseur de la liaison équivalente.

Liaison pivot glissant d'axe $(B,\vec{y})$

$$\left\{V_{1/0}^{L_B}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ \beta_B & v_B\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{B,B_0}$$

Ponctuelle de normale $(A,\vec{z})$

$$\left\{V_{1/0}^{L_A}\right\}=\begin{Bmatrix}\alpha_A & u_A\\ \beta_A & v_A\\ \gamma_A & 0\end{Bmatrix}_{A,B_0}$$



On transporte la ponctuelle en B

$$\vec{V}B_{1/0}^{L_A}=\vec{V}A_{1/0}^{L_A}+\vec{B}A\,\Lambda\,\vec{\Omega}_{1/0}^{L_A}=\begin{pmatrix}u_A\\ v_A\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Lambda\begin{pmatrix}\alpha_A\\ \beta_A\\ \gamma_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_A\\ v_A-d\gamma_A\\ d\beta_A\end{pmatrix}$$

On écrit l'égalité des torseurs cinématiques et on montre que :

$\alpha_A=0 \quad d\beta_A=0 \quad \gamma_A=0 \quad u_A=0 \quad w_A=0$

Seul le terme $v_B=v_A$ *est non nul.*

D'où : $\left\{V_{1/0}^{L_{eq}}\right\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & v_{eq}\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{B,B_0}$

$\boxed{\textit{On en déduit qu'il s'agit d'une liaison glissière de direction } \vec{y}}$