

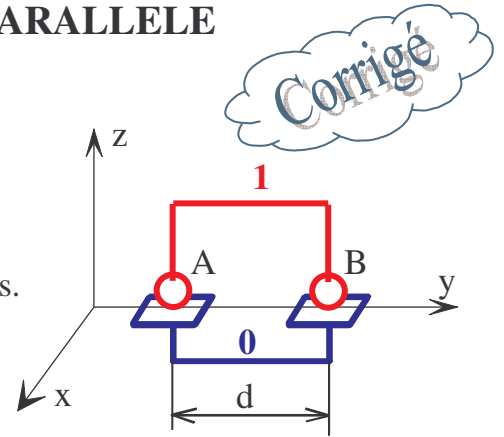
EXERCICE 9 - LIAISONS EQUIVALENTES EN PARALLELE

Résolution en cinématique

9-1 Deux liaisons ponctuelles de normales parallèles.

- Calculer le torseur cinématique de la liaison équivalente à ces deux liaisons exprimé au point A.
- En déduire le nom de cette liaison ainsi que ses caractéristiques.

$$\{V_{I/O}^{L_A}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_A & u_A \\ \beta_A & v_A \\ \gamma_A & 0 \end{Bmatrix}_{A,B_0} \quad \{V_{I/O}^{L_B}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_B & u_B \\ \beta_B & v_B \\ \gamma_B & 0 \end{Bmatrix}_{B,B_0}$$



$$\vec{V}_A^{L_B} = \vec{V}_B^{L_B} + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{I/O}^{L_B} = \begin{pmatrix} u_B \\ v_B \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha_B \\ \beta_B \\ \gamma_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_B + d \cdot \gamma_B \\ v_B \\ -d \alpha_B \end{pmatrix}$$

Le torseur équivalent est égal à chacun des torseurs cinématiques.

$$\{V_{I/O}^{L_{eq}}\} = \{V_{I/O}^{L_A}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_A & u_A \\ \beta_A & v_A \\ \gamma_A & 0 \end{Bmatrix}_{A,B_0} = \{V_{I/O}^{L_B}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_B & u_B + d \cdot \gamma_B \\ \beta_B & v_B \\ \gamma_B & -d \alpha_B \end{Bmatrix}_{A,B_0}$$

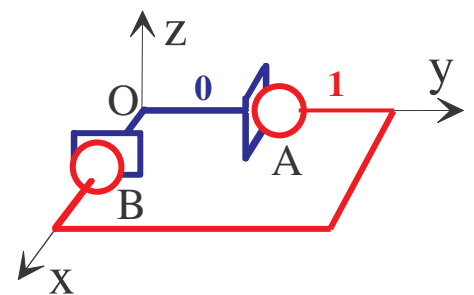
$$D'où : \quad -d \alpha_B = 0 \Rightarrow \{V_{I/O}^{L_{eq}}\} = \begin{Bmatrix} 0 & u_{eq} \\ \beta_{eq} & v_{eq} \\ \gamma_{eq} & 0 \end{Bmatrix}_{A,B_0}$$

C'est le torseur cinématique d'une liaison linéaire rectiligne de normale $(A, \vec{z})$ et de ligne de contact $(A, \vec{y})$.

9-2 Deux liaisons ponctuelles de normales concourantes en O.

(Rem: Y_A et $X_B > 0$)

- Exprimer les torseurs cinématiques de chaque liaison en O.
- Déterminer le torseur cinématique de la liaison équivalente.
- Donner le nom de cette liaison.



$$\{V_{I/O}^{L_A}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_A & u_A \\ \beta_A & 0 \\ \gamma_A & w_A \end{Bmatrix}_{A,B_0} \quad \{V_{I/O}^{L_B}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_B & 0 \\ \beta_B & v_B \\ \gamma_B & w_B \end{Bmatrix}_{B,B_0}$$

Ces deux torseurs sont inchangés si on les écrit en O.

On peut donc écrire l'égalité ce qui annule les composantes : $u_A = 0$ et $v_B = 0$

$$D'où : \quad \{V_{I/O}^{L_{eq}}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{eq} & 0 \\ \beta_{eq} & 0 \\ \gamma_{eq} & w_{eq} \end{Bmatrix}_{A,B_0}$$

On reconnaît le torseur d'une liaison linéaire annulaire d'axe $(O, \vec{z})$ et de centre O.

9-3 Deux linéaires annulaires dont les axes sont colinéaires.

- Calculer le torseur cinématique exprimé en O de la liaison équivalente.
- En déduire le nom de cette liaison.

On utilise le résultat précédent pour reconnaître deux linéaires annulaires d'axe $(O, \vec{z})$. L'une est centrée en O l'autre est centrée en E.

Ecrivons les deux torseurs cinématiques

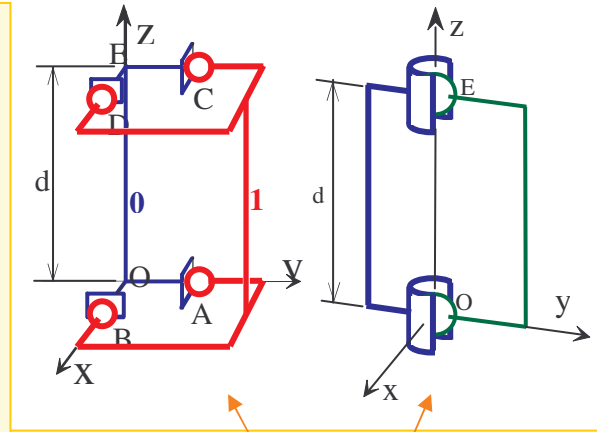
$$\{V_{1/0}^{L_O}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_O & 0 \\ \beta_O & 0 \\ \gamma_O & w_O \end{Bmatrix}_{O, B_0} \quad \{V_{1/0}^{L_E}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_E & 0 \\ \beta_E & 0 \\ \gamma_E & w_E \end{Bmatrix}_{E, B_0}$$

Transportons en O le second torseur :

$$\vec{V}_{O/0}^{L_E} = \vec{V}_{E/0}^{L_E} + \vec{OE} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}^{L_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w_E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha_E \\ \beta_E \\ \gamma_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d\beta_E \\ d\alpha_E \\ w_E \end{pmatrix}$$

Si on écrit l'égalité des deux torseurs en O, on obtient $-d.\beta_E = 0$ et $d.\alpha_E = 0$

D'où : $\{V_{1/0}^{L_{eq}}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma_{eq} & w_{eq} \end{Bmatrix}_{A, B_0}$ Il s'agit d'une liaison pivot glissant d'axe $(O, \vec{z})$



Deux modèles équivalents

9-4 Trois liaisons ponctuelles dont les normales sont parallèles.

- Calculer le torseur cinématique exprimé en A de la liaison équivalente.
- En déduire le nom de cette liaison.

$$\{V_{1/0}^{L_A}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_A & u_A \\ \beta_A & v_A \\ \gamma_A & 0 \end{Bmatrix}_{A, B_0} \quad \{V_{1/0}^{L_B}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_B & u_B \\ \beta_B & v_B \\ \gamma_B & 0 \end{Bmatrix}_{B, B_0} \quad \{V_{1/0}^{L_C}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_C & u_C \\ \beta_C & v_C \\ \gamma_C & 0 \end{Bmatrix}_{C, B_0}$$

On transporte les moments en A

$$\vec{V}_{A/0}^{L_B} = \vec{V}_{B/0}^{L_B} + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}^{L_B} = \begin{pmatrix} u_B \\ v_B \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha_B \\ \beta_B \\ \gamma_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_B \\ v_B - b\gamma_B \\ b\beta_B \end{pmatrix}$$

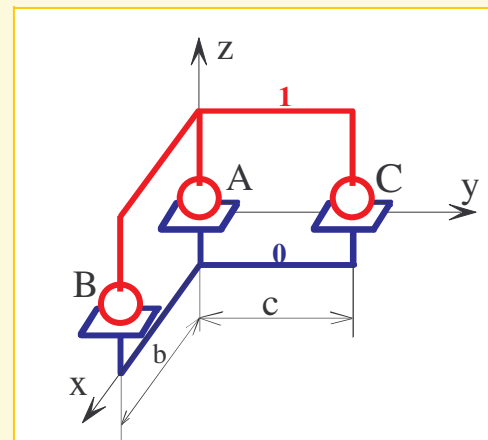
$$\vec{V}_{A/0}^{L_C} = \vec{V}_{C/0}^{L_C} + \vec{AC} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}^{L_C} = \begin{pmatrix} u_C \\ v_C \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha_C \\ \beta_C \\ \gamma_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_C + c\gamma_C \\ v_C \\ -c\alpha_C \end{pmatrix}$$

On en déduit $b\beta_B = 0$ et $-c\alpha_C = 0$.

Les torseurs cinématiques sont égaux d'où $\beta_{eq} = \alpha_{eq} = 0$

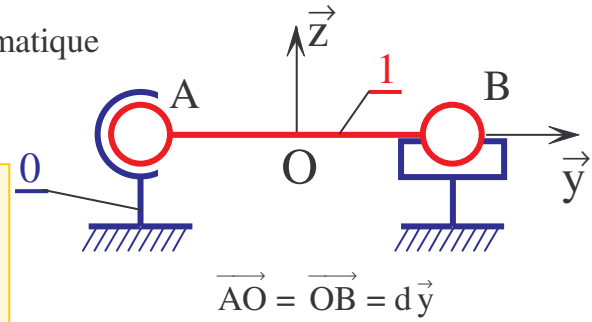
On en déduit : $\{V_{1/0}^{L_{eq}}\} = \begin{Bmatrix} 0 & u_{eq} \\ 0 & v_{eq} \\ \gamma_{eq} & 0 \end{Bmatrix}_{A, B_0}$

C'est le torseur d'un appui plan de normale parallèle à $\vec{z}$.



9-5 Un guidage en rotation sur deux paliers.

- Calculer le torseur de la liaison équivalente cinématique exprimé en O.
- De quelle liaison s'agit-il ?



$$\{V_{1/0}^{L_A}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_A & 0 \\ \beta_A & 0 \\ \gamma_A & 0 \end{Bmatrix}_{A,B_0} \quad \{V_{1/0}^{L_B}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_B & 0 \\ \beta_B & v_B \\ \gamma_B & 0 \end{Bmatrix}_{B,B_0}$$

On demande l'écriture des torseurs en O :

$$\vec{V}_{O/0}^{L_A} = \vec{V}_{A/0}^{L_A} + \vec{OA} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}^{L_A} \Rightarrow$$

$$\vec{V}_{O/0}^{L_A} = \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha_A \\ \beta_A \\ \gamma_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d\gamma_A \\ 0 \\ d\alpha_A \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_{O/0}^{L_B} = \vec{V}_{B/0}^{L_B} + \vec{OB} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}^{L_B} \Rightarrow$$

$$\vec{V}_{O/0}^{L_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_B \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha_B \\ \beta_B \\ \gamma_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\gamma_B \\ v_B \\ -d\alpha_B \end{pmatrix}$$

Si on égalise les torseurs cinématiques, on trouve :

$$\alpha_A = \alpha_B \quad \text{et} \quad d\alpha_A = -d\alpha_B \Rightarrow \alpha_A = \alpha_B = 0$$

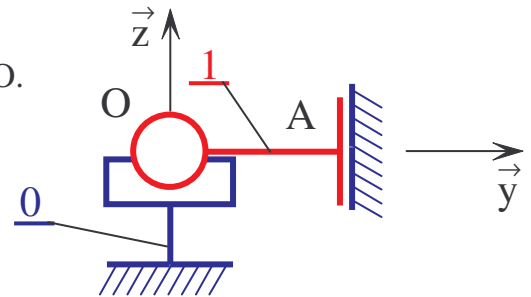
$$\gamma_A = \gamma_B \quad \text{et} \quad -d\gamma_A = d\gamma_B \Rightarrow \gamma_A = \gamma_B = 0$$

Enfin on voit que $v_B = 0$ et que seul $\beta_A = \beta_B$ est non nul.

$$D'où : \{V_{1/0}^{L_{eq}}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{eq} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O,B_0} \quad \boxed{\text{On reconnaît le torseur d'une liaison pivot d'axe } (O, \vec{y})}$$

9-6 Centrage court appui plan

- Calculer le torseur de la liaison équivalente exprimé en O.
- De quelle liaison s'agit-il ?



$$\{V_{1/0}^{L_A}\} = \begin{Bmatrix} 0 & u_A \\ \beta_A & 0 \\ 0 & w_A \end{Bmatrix}_{A,B_0} \quad \{V_{1/0}^{L_O}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_O & 0 \\ \beta_O & v_O \\ \gamma_O & 0 \end{Bmatrix}_{O,B_0}$$

$$\vec{V}_{O/0}^{L_A} = \vec{V}_{A/0}^{L_A} + \vec{OA} \wedge \vec{\Omega}_{1/0}^{L_A} = \begin{pmatrix} u_A \\ 0 \\ w_A \end{pmatrix} + d \vec{y} \wedge \beta_A \vec{z} = \begin{pmatrix} u_A \\ 0 \\ w_A \end{pmatrix}$$

Le torseur de l'appui plan a donc la même expression en A et en O.

Si on égalise les torseurs cinématiques, on trouve :

$$\alpha_O = 0 \quad \gamma_O = 0 \quad u_A = 0 \quad v_O = 0 \quad w_A = 0$$

Là encore, seul $\beta_O = \beta_A$ est non nul.

$$D'où : \{V_{1/0}^{L_{eq}}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{eq} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O,B_0} \quad \boxed{\text{Il s'agit donc d'une liaison pivot d'axe } (O, \vec{y})}$$

9-7 Un cylindre long associé à une ponctuelle.

Une liaison pivot-glissant associée à une ponctuelle.

➤ Calculer le torseur de la liaison équivalente en B.

Liaison pivot glissant
d'axe $(B, \vec{y})$

$$\{V_{1/0}^{L_B}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_B & v_B \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B, B_0}$$

Ponctuelle de normale $(A, \vec{z})$
de normale $(A, \vec{z})$

$$\{V_{1/0}^{L_A}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_A & u_A \\ \beta_A & v_A \\ \gamma_A & 0 \end{Bmatrix}_{A, B_0}$$

On transporte la ponctuelle en B

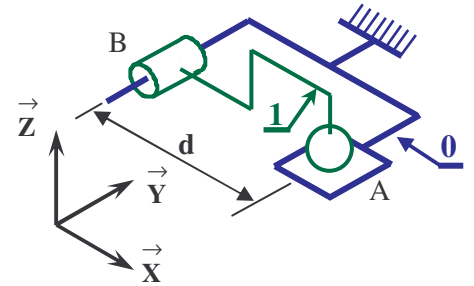
$$\vec{V}_{1/0}^{L_A} = \vec{V}_{1/0}^{L_A} + \vec{B}A \wedge \vec{\Omega}_{1/0}^{L_A} = \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha_A \\ \beta_A \\ \gamma_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_A \\ v_A - d\gamma_A \\ d\beta_A \end{pmatrix}$$

On écrit l'égalité des torseurs cinématiques $\Rightarrow \alpha_A = 0 \quad d\beta_A = 0 \quad \gamma_A = 0 \quad u_A = 0 \quad w_A = 0$

Seul le terme $v_B = v_A$ est non nul.

$$D'où : \{V_{1/0}^{L_{eq}}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_{eq} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B, B_0}$$

On en déduit qu'il s'agit d'une liaison glissière de direction $\vec{y}$



9-8 Autre guidage en translation

Un appui plan associé à une linéaire rectiligne.

➤ Calculer le torseur de la liaison équivalente en B.

Linéaire rectiligne de normale $(B, \vec{x})$
de ligne de contact $(B, \vec{y})$

$$\{V_{1/0}^{L_B}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_B & 0 \\ \beta_B & v_B \\ 0 & w_B \end{Bmatrix}_{B, B_0}$$

Appui plan
de normale $(A, \vec{z})$

$$\{V_{1/0}^{L_A}\} = \begin{Bmatrix} 0 & u_A \\ 0 & v_A \\ \gamma_A & 0 \end{Bmatrix}_{A, B_0}$$

On transporte l'appui plan en B

$$\vec{V}_{1/0}^{L_A} = \vec{V}_{1/0}^{L_A} + \vec{B}A \wedge \vec{\Omega}_{1/0}^{L_A} = \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_A \\ v_A - a\gamma_A \\ 0 \end{pmatrix}$$

On écrit l'égalité des torseurs cinématiques $\Rightarrow \alpha_B = 0 \quad \beta_B = 0 \quad \gamma_A = 0 \quad u_A = 0 \quad w_B = 0$

Seul le terme $v_B = v_A$ est non nul.

$$D'où : \{V_{1/0}^{L_{eq}}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_{eq} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B, B_0}$$

On en déduit qu'il s'agit d'une liaison glissière de direction $\vec{y}$

