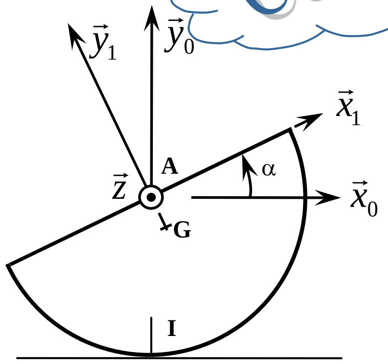
Exercice n°17

Demi disque sur plan. *(Energie-puissance)*

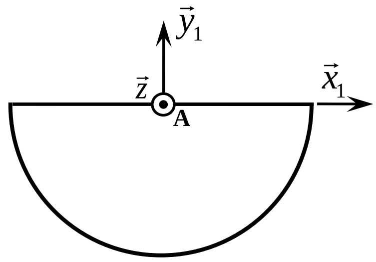
- Au bâti 0 est attaché le repère galiléen R_g $(O, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$
- Un solide 1 est constitué d'un demi disque homogène, de masse *m* de rayon *r* et de centre A.
- Son centre d'inertie est noté G. On lui associe le repère R_1 $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et on pose $\alpha = (\vec{x}_g, \vec{x}_1)$
- Le solide 1 est en contact en I avec un plan horizontal lié au bâti. Il oscille par rapport à R_g avec roulement sans glissement en I.
- Le mouvement est considéré plan.

On donne : $\overrightarrow{GA} = b\vec{y}_1$



$$I(A,S) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{B_1}$$

1 – Proposer en la justifiant une forme simplifiée l'opérateur d'inertie I(A,S).



*Le cylindre entier de masse **m'** a un moment d'inertie* $I_{Az-Cyl} = \dfrac{m' r^2}{2}$

Pour une raison de symétrie, les deux demi-cylindres de masse $m = \dfrac{m'}{2}$

ont même inertie par rapport à l'axe $(A, \vec{z})$.

Donc pour le demi-cylindre, $I_{Az} = \dfrac{1}{2}\dfrac{m' r^2}{2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2m.r^2}{2} = \dfrac{m.r^2}{2}$

On raisonne de même pour I_{AX} *et pour* I_{AY} *l'axe et on obtient* $I_{AX} = I_{AY} = \dfrac{m.r^2}{4} + \dfrac{m.h^2}{12}$ *avec* $h = 0$

Les deux plans de symétrie annulent les produits d'inertie.

L'opérateur d'inertie obtenu a donc pour forme $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{B_1}$

De plus, le solide étant plan on a $C=2A$

2 – Exprimer le torseur cinématique du mouvement du solide 1 par rapport au repère R_g exprimé en I, A puis en G, en ne faisant intervenir que α, sa dérivée et les paramètres géométriques.

Il y a roulement sans glissement en I entre 1 et 0 $\Rightarrow \left\{ V_0^1 \right\} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha}\,\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_I$

$$\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{I\in 1/0}} + \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -r\vec{y}_0 \wedge \dot{\alpha}\,\vec{z} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = -r\,\dot{\alpha}\,\vec{x}_0}$$

$$\overrightarrow{V_{G\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -r\,\dot{\alpha}\,\vec{x}_0 + b\vec{y}_1 \wedge \dot{\alpha}\,\vec{z} \Rightarrow \overrightarrow{V_{G\in 1/0}} = -r\,\dot{\alpha}\,\vec{x}_0 + b\,\dot{\alpha}\,\vec{x}_1$$

d'où : $\boxed{\left\{ V_0^1 \right\} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha}\,\vec{z} \\ -r\,\dot{\alpha}\,\vec{x}_0 \end{matrix} \right\}_A}$ et $\boxed{\left\{ V_0^1 \right\} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha}\,\vec{z} \\ -r\,\dot{\alpha}\,\vec{x}_0 + b\,\dot{\alpha}\,\vec{x}_1 \end{matrix} \right\}_G}$

3 – Montrer que le moment cinétique du solide 1 par rapport au repère R_g en A s'écrit :

$$\overrightarrow{\sigma_{A\in 1/0}} = C\overset{o}{\alpha}\vec{z} - mbr\overset{o}{\alpha}\cos(\alpha)\,\vec{z}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{A\in 1/0}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{B_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \overset{o}{\alpha} \end{pmatrix}_{B_1} + \overrightarrow{AG} \wedge m\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C\overset{o}{\alpha} \end{pmatrix}_{B_1} + \overrightarrow{AG} \wedge m\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = C\overset{o}{\alpha}\vec{z} - mb\vec{y}_1 \wedge -r\overset{o}{\alpha}\vec{x}_0$$

$$= C\overset{o}{\alpha}\vec{z} + mbr\overset{o}{\alpha}\vec{y}_1 \wedge \vec{x}_0 = C\overset{o}{\alpha}\vec{z} + mbr\overset{o}{\alpha}(-\cos(\alpha)\vec{z}) = \underline{C\overset{o}{\alpha}\vec{z} - mbr\overset{o}{\alpha}\cos(\alpha)\vec{z}}$$

En déduire l'expression du torseur cinétique du solide 1 par rapport au repère R_g en A

d'où : $$\boxed{\left\{C_0^1\right\} = \left\{\begin{matrix} -mr\overset{o}{\alpha}\vec{x}_0 + mb\overset{o}{\alpha}\vec{x}_1 \\ C\overset{o}{\alpha}\vec{z} - mbr\overset{o}{\alpha}\cos(\alpha)\vec{z} \end{matrix}\right\}_A}$$

4 – Déterminer l'expression de l'énergie cinétique du solide 1 par rapport à R_g.

$$2Ec_{1/0} = \left\{V_0^1\right\} \otimes \left\{C_0^1\right\} = \left\{\begin{matrix} \overset{o}{\alpha}\vec{z} \\ -r\overset{o}{\alpha}\vec{x}_0 \end{matrix}\right\}_A \otimes \left\{\begin{matrix} -mr\overset{o}{\alpha}\vec{x}_0 + mb\overset{o}{\alpha}\vec{x}_1 \\ C\overset{o}{\alpha}\vec{z} - mbr\overset{o}{\alpha}\cos(\alpha)\vec{z} \end{matrix}\right\}_A$$

$$= C\overset{o}{\alpha}^2 - mbr\overset{o}{\alpha}^2\cos(\alpha) + mr^2\overset{o}{\alpha}^2 - mbr\overset{o}{\alpha}^2\cos(\alpha)$$

$$\boxed{2\cdot Ec_{1/0} = \left(C + mr^2\right)\overset{o}{\alpha}^2 - 2mbr\cos(\alpha)\overset{o}{\alpha}^2}$$

5 – Déterminer la puissance des efforts extérieurs appliqués au solide 1 dans son mouvement par rapport à R_g.

<u>On isole le demi-disque</u>.

<u>Bame</u> *: Il est soumis au contact en I* $\left\{0 \to 1\right\} = {}_I\left\{\begin{matrix} X_{0\to 1} & / \\ Y_{0\to 1} & / \\ / & \mathbf{0} \end{matrix}\right\}_{B_0}$

et au poids en G $\left\{pes \to 1\right\} = {}_G\left\{\begin{matrix} -mg\cdot\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$

Puissance des efforts extérieurs appliqués au solide 1 dans son mouvement par rapport à R_g.

$$\mathcal{P}_{(0\to 1/0)} = \left\{ V_0^1 \right\} \otimes \left\{ 0 \to 1 \right\} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\,\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I \otimes \begin{Bmatrix} \vec{R}_{0\to 1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I = \dot{\alpha}\,\vec{z}\cdot\vec{0} + \vec{0}\cdot\vec{R}_{0\to 1} = 0$$

	$\vec{x}_1$	$\vec{y}_1$
$\vec{x}_0$	$\cos(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$
$\vec{y}_0$	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$

$$\mathcal{P}_{(pes\to 1/0)} = \left\{ V_0^1 \right\} \otimes \left\{ pes \to 1 \right\} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\,\vec{z} \\ -r\,\dot{\alpha}\,\vec{x}_0 + b\,\dot{\alpha}\,\vec{x}_1 \end{Bmatrix}_G \otimes \begin{Bmatrix} -mg\cdot\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

$$= \left(-r\,\dot{\alpha}\,\vec{x}_0 + b\,\dot{\alpha}\,\vec{x}_1 \right)\cdot\left(-mg\cdot\vec{y}_0 \right) \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_{(pes\to 1/0)} = -b\,\dot{\alpha}\,mg\,\sin(\alpha)}$$

6 – Appliquer le théorème de l'énergie cinétique et en déduire la loi de mouvement.

$$\frac{dEc_{1/0}}{dt} = \mathcal{P}_{(pes\to 1/0)}$$

$$2\frac{dEc_{1/0}}{dt} = 2\left(C + mr^2\right)\dot{\alpha}\,\ddot{\alpha} - 4mbr\cos(\alpha)\,\dot{\alpha}\,\ddot{\alpha} + 2mbr\sin(\alpha)\,\dot{\alpha}^3$$

$$\Rightarrow \left(C + mr^2\right)\cancel{\dot{\alpha}}\,\ddot{\alpha} - 2mbr\cos(\alpha)\,\cancel{\dot{\alpha}}\,\ddot{\alpha} + mbr\sin(\alpha)\,\dot{\alpha}^{\cancel{3}\,2} = -b\,\cancel{\dot{\alpha}}\,mg\sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(C + mr^2\right)\ddot{\alpha} - 2mbr\cos(\alpha)\,\ddot{\alpha} + mbr\sin(\alpha)\,\dot{\alpha}^2 = -bmg\sin(\alpha)} \quad (1)$$

7 – En posant : $C = \dfrac{m\cdot r^2}{2}$, montrer que cette équation ne dépend pas de la masse .

Si on remplace C par $\dfrac{mr^2}{2}$, *on obtient*

:

$$\left(\frac{3mr^2}{2}\right)\ddot{\alpha} - 2mbr\cos(\alpha)\,\ddot{\alpha} + mbr\sin(\alpha)\,\dot{\alpha}^2 = -bmg\sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{3r^2}{2} - 2br\cos(\alpha)\right)\ddot{\alpha} + br\sin(\alpha)\,\dot{\alpha}^2 = -bg\sin(\alpha)} \quad (2)$$

R_{mq} : sachant que $b = \dfrac{4\cdot r}{3\cdot\pi}$, *le mouvement ne dépend que de r et g*

8 – En envisageant le cas des petits mouvements avec les conditions initiales suivantes, donner l'expression de $\alpha(t)$ ainsi que la période du mouvement.

$\alpha(t)$ *très petit devant* π $\quad cos(\alpha) \approx 1$ et $sin(\alpha(t)) \approx \alpha(t)$

En remplaçant dans (2), on obtient : $\left(\dfrac{3r^2}{2} - 2br\right)\ddot{\alpha} + br \cdot \alpha\, \dot{\alpha}^2 = -bg \cdot \alpha$

avec $\left|bm \cdot \alpha[g]\right| > \left|bm \cdot \alpha\left[r\,\dot{\alpha}^2\right]\right|$ on obtient $\boxed{\left[\dfrac{3r^2}{2} - 2br\right]\ddot{\alpha} + bg \cdot \alpha = 0}$ (3)

Recherche de la solution de l'équation $(3) \quad P \cdot \ddot{\alpha} + Q \cdot \alpha = 0$

- Elle est de la forme $\quad (a) \quad \alpha = C_1 \cdot cos\ \omega t + C_2 \cdot sin\ \omega t$ *dont on calcule les dérivées :*

$$(b) \quad \dot{\alpha} = -C_1 \cdot \omega \cdot sin\ \omega t + C_2 \cdot \omega \cdot cos\ \omega t$$

$$(c) \quad \ddot{\alpha} = -C_1 \cdot \omega^2 \cdot cos\ \omega t - C_2 \cdot \omega^2 \cdot sin\ \omega t$$

- Avec les conditions initiales : à $t = 0$, $\quad \alpha = \alpha_0$ *l'équation* $(a) \Rightarrow C_1 = \alpha_0$

$\dot{\alpha} = 0$ *l'équation* $(b) \Rightarrow C_2 = 0$

Ainsi l'équation (a) *devient :* $\alpha = \alpha_0 \cdot cos\ \omega t$ *et l'équation* (c) : $\ddot{\alpha} = -\alpha_0 \cdot \omega^2 \cdot cos\ \omega t$

En remplaçant α *et* $\ddot{\alpha}$ *dans l'équation* $(2) \quad : \quad P \cdot \ddot{\alpha} + Q \cdot \alpha = 0$,

on obtient : $(2) \quad P \cdot (-\cancel{\alpha_0} \cdot \omega^2 \cdot \cancel{cos\ \omega t}) + Q \cdot (\cancel{\alpha_0} \cdot \cancel{cos\ \omega t}) = 0$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{Q}{P} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot bg}{3r^2 - 4br}}}$$

D'où l'équation du mouvement : $\boxed{\alpha = \alpha_0 \cdot cos\left(\sqrt{\dfrac{2 \cdot bg}{3r^2 - 4br}} \cdot t\right)}$

avec $b = \dfrac{4r}{3\pi}$, *l'équation (3) devient* $\left[\dfrac{3r^2}{2} - \dfrac{8r^2}{3\pi}\right]\ddot{\alpha} + \dfrac{4r}{3\pi} g \cdot \alpha = 0$ $\boxed{\left[9\pi - 16\right] r\,\ddot{\alpha} + 8g \cdot \alpha = 0}$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{8g}{(9\pi - 16)r}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\alpha = \alpha_0 \cdot cos\left(\sqrt{\frac{8g}{(9\pi - 16)r}} \cdot t\right)}$$

Application numérique : pour un rayon de 5cm

$$\omega = \sqrt{\frac{8 \times 9,81}{(9\pi - 16) \times 0,05}} = 11,3\ rad.s^{-1} \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{11,3} = 0,56s}$$