EXERCICE 16 - RUGOSIMETRE TRIDIMENSIONNEL

Corrigé

DETERMINATION DES EQUATIONS DYNAMIQUES

Question n°1

- Isoler l'ensemble (3), puis écrivez le théorème du moment dynamique en (A) en projection sur ($\vec{y}_0$).

Ecrivez obligatoirement votre résultat sous la forme $\mathbf{d}\cdot\ddot{\theta}+\mathbf{e}\cdot\ddot{x}+\mathbf{f}\cdot\dot{\theta}+\mathbf{g}\cdot\theta=\mathbf{h}$ (les termes **d, e, f, g** et **h** peuvent dépendre de θ).

➤ **On isole l'ensemble (3)**

➤ **Bilan d'actions mécaniques sur S={3} :**

$$\tau_{2\to3}=\left\{\begin{matrix} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & -f_3\dot{\theta} \\ Z_{23} & M_{23} \end{matrix}\right\}_{A,\,B_3}$$

pivot de coefficient de frottement visqueux f_3

$$\tau_{M_3\to3}=\left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ C_{m3}\cdot\vec{y}_0 \end{matrix}\right\}$$

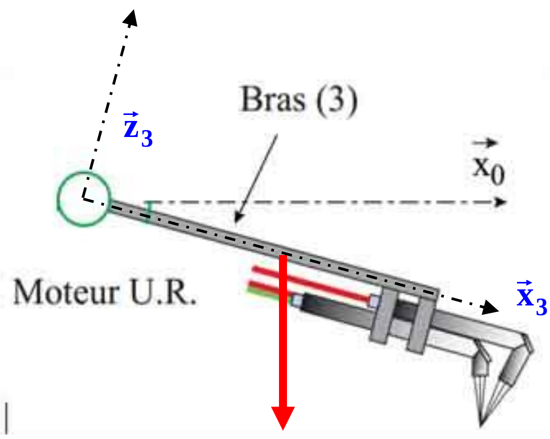
moteur M_3

$$\tau_{Ressort\to3}=\left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ C_r\cdot\vec{y}_0 \end{matrix}\right\}$$

ressort d'équilibrage

$$C_r=-\left(K_{tor}\cdot\theta+C_0\right)$$

$$\tau_{Pes\to3}=\left\{\begin{matrix} -m_3\cdot g\cdot\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_{G_3}=\left\{\begin{matrix} -m_3.g\cdot\vec{z}_0 \\ m_3.g.r.\cos\theta\cdot\vec{y}_0 \end{matrix}\right\}_{A}$$



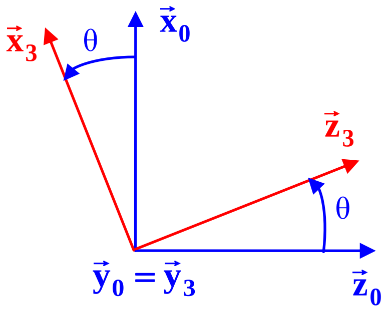
➤**P.F.D.** Théorème du moment dynamique en (A) en projection sur ($\vec{y}_0$) :

☞ Calcul du moment cinétique en A :

$$\vec{\sigma}_A 3/0=\overline{\overline{I}}(A,3).\vec{\Omega}3/0+m_3\overrightarrow{AG_3}\wedge\vec{V}(A\in3/0)$$

$$\vec{\sigma}_A 3/0=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{B_3}.\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_{B_3}+m_3\cdot r\cdot\vec{x}_3\wedge\dot{x}\cdot\vec{x}_0$$

$$\vec{\sigma}_A 3/0=-F\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{x}_3+\left(B\cdot\dot{\theta}-m_3\cdot r\cdot\dot{x}\cdot\sin\theta\right)\vec{y}_0-D\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{z}_3$$



☞ Calcul du moment dynamique en A :

$$\vec{\delta}_A 3/0\cdot\vec{y}_0=\left.\frac{d\vec{\sigma}_A 3/0}{dt}\right|_0\cdot\vec{y}_0+m_3\left(\vec{V}(A\in3^*/0)\wedge\vec{V}(G_3\in3/0)\right)\cdot\vec{y}_0$$

Premier terme :

On note que : $$\frac{d\left(\vec{\sigma}_A 3/0\cdot\vec{y}_0\right)}{dt}=\left.\frac{d\vec{\sigma}_A 3/0}{dt}\right|_0\cdot\vec{y}_0+\cancel{\vec{\sigma}_A 3/0\cdot\left.\frac{d\vec{y}_0}{dt}\right|_0}$$

d'où $\left.\frac{d\vec{\sigma}_{A\,3/0}}{dt}\right|_0 \cdot \vec{y}_0 = \frac{d\left(\vec{\sigma}_{A\,3/0}\cdot\vec{y}_0\right)}{dt} = B\cdot\ddot{\theta} - m_3\cdot r\cdot\left(\ddot{x}\cdot\sin\theta + \dot{x}\cdot\dot{\theta}\cdot\cos\theta\right)$

Second terme :

$$m_3\left(\vec{V}(A\in 3/0)\wedge\vec{V}(G_3\in 3/0)\right)\cdot\vec{y}_0 = m_3\left(\vec{V}(A\in 3/0)\wedge\left(\cancel{\vec{V}(A\in 3/0)} + \overrightarrow{G_3A}\wedge\vec{\Omega}_{3/0}\right)\right)\cdot\vec{y}_0$$

$$= m_3\left(\dot{x}\cdot\vec{x}_0\wedge\left(-r\cdot\vec{x}_3\wedge\dot{\theta}\cdot\vec{y}_0\right)\right)\cdot\vec{y}_0 = m_3\left(\dot{x}\cdot\vec{x}_0\wedge -r\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{z}_3\right)\cdot\vec{y}_0 = m_3\left(r\cdot\dot{x}\cdot\dot{\theta}\cdot\cos\theta\cdot\vec{y}_0\right)\cdot\vec{y}_0$$

On somme les deux termes :

$$\vec{\delta}_{A\,3/0}\cdot\vec{y}_0 = B\cdot\ddot{\theta} - m_3\cdot r\cdot\left(\ddot{x}\cdot\sin\theta + \dot{x}\cdot\dot{\theta}\cdot\cos\theta\right) + m_3\cdot r\cdot\dot{\theta}\cdot\dot{x}\cdot\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\delta}_{A\,3/0}\cdot\vec{y}_0 = B\cdot\ddot{\theta} - m_3\cdot r\cdot\ddot{x}\cdot\sin\theta}$$

☞ Le théorème du moment dynamique s'écrit donc : $\vec{M}_A\,\bar{3}\rightarrow 3\cdot\vec{y}_0 = \vec{\delta}_{A\,3/0}\cdot\vec{y}_0$

$C_{m3} + C_r - f_3\cdot\dot{\theta} + m_3\cdot g\cdot r\cdot\cos\theta = B\cdot\ddot{\theta} - m_3\cdot r\cdot\ddot{x}\cdot\sin\theta$ avec $C_r = -\left(K_{tor}\cdot\theta + C_0\right)$

Soit $B\cdot\ddot{\theta} - m_3\cdot r\cdot\ddot{x}\cdot\sin\theta + f_3\cdot\dot{\theta} + K_{tor}\cdot\theta = C_{m3} - C_0 + m_3\cdot g\cdot r\cdot\cos\theta$

Etude des conditions particulières :
À l'équilibre (θ=0 et C_{m3}=0), on a $0 = -C_0 + m_3\cdot g\cdot r$

D'où : $B\cdot\ddot{\theta} - m_3\cdot r\cdot\ddot{x}\cdot\sin\theta + f_3\cdot\dot{\theta} + K_{tor}\cdot\theta = C_{m3} + m_3\cdot g\cdot r\cdot\left(\cos\theta - 1\right)$

- En déduire l'expression de (**C_{m3}**).

Homogénéité

$$\boxed{C_{m3} = B\cdot\ddot{\theta} - m_3\cdot r\cdot\ddot{x}\cdot\sin\theta + f_3\cdot\dot{\theta} + K_{tor}\cdot\theta + m_3\cdot g\cdot r\cdot\left(1 - \cos\theta\right)}$$

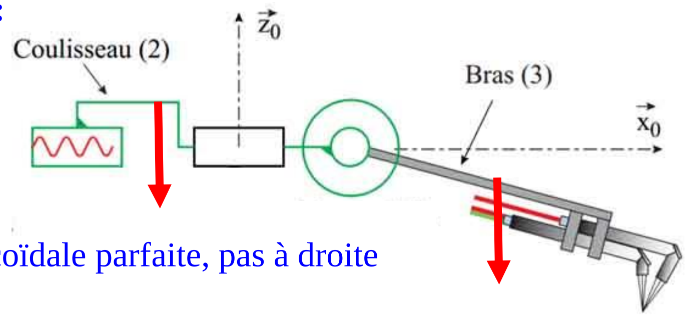
Équation 1

Question n°2

- Isolez l'ensemble (2∪3), puis écrivez le théorème de la résultante dynamique en projection sur ($\vec{x}_0$).

➤ **On isole l'ensemble Système isolé : S = {2+3}**

➤ **Bilan d'actions mécaniques sur S={2+3} :**



$$\underset{Hélicoïdale}{\tau_{1\rightarrow 2}} = {}_O\begin{Bmatrix} X_{12} & -\frac{p_a}{2\pi}.X_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_i,\vec{z}_i)}$$

hélicoïdale parfaite, pas à droite

$$\underset{Glissière}{\tau_{0\rightarrow 2}} = {}_O\begin{Bmatrix} -f_2\cdot\dot{x} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_i,\vec{z}_i)}$$

glissière de coefficient de frottement visqueux f_2

$$\tau_{Pes\rightarrow 3} = {}_{G_3}\begin{Bmatrix} -m_3\cdot g\cdot\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} -m_3.g\cdot\vec{z}_0 \\ m_3.g.r.\cos\theta\cdot\vec{y}_0 \end{Bmatrix} \quad \tau_{Pes\rightarrow 2} = {}_{G_2}\begin{Bmatrix} -m_2\cdot g\cdot\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

☞ Calcul des résultantes cinétiques:

$$\vec{R}_c 2/0 = \ m_2 \cdot \vec{V}(G_2 \in 2/0) = m_2 \cdot \dot{x} \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{R}_c 3/0 = \ m_3 \cdot \vec{V}(G_3 \in 3/0) \quad \text{avec} \quad \vec{V}(G_3 \in 3/0) = \vec{V}(A \in 3/0) + \overrightarrow{G_3A} \wedge \vec{\Omega} 3/0$$

$$= \dot{x} \cdot \vec{x}_0 - r \cdot \vec{x}_3 \wedge \dot{\theta} \cdot \vec{y}_0 \Rightarrow \vec{R}_c 3/0 = \ m_3 \cdot \left(\dot{x} \cdot \vec{x}_0 - r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_3 \right)$$

☞ Calcul des résultantes dynamiques:

$$\vec{R}_d 2/0 = \ m_2 \cdot \vec{\Gamma}(G_2 \in 2/0) = m_2 \cdot \ddot{x} \cdot \vec{x}_0$$

$$\vec{R}_d 3/0 = m_3 \cdot \vec{\Gamma}(G_3 \in 3/0) \quad \text{avec} \quad \vec{\Gamma}(G_3 \in 3/0) = \left. \frac{d\vec{V}(G_3 \in 3/0)}{dt} \right|_{B_0} = \left. \frac{d(\dot{x} \cdot \vec{x}_0 - r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_3)}{dt} \right|_{B_0}$$

$$= \ddot{x} \cdot \vec{x}_0 - r \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z}_3 - r \cdot \dot{\theta} \left(\dot{\theta} \cdot \vec{y}_0 \wedge \vec{z}_3 \right) = \ddot{x} \cdot \vec{x}_0 - r \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z}_3 - r \cdot \dot{\theta}^2 \vec{x}_3$$

$$\Rightarrow \vec{R}_d 3/0 = \ m_3 \cdot \left(\ddot{x} \cdot \vec{x}_0 - r \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z}_3 - r \cdot \dot{\theta}^2 \vec{x}_3 \right)$$

➢**P.F.D.** Théorème de la résultante dynamique en projection sur ($\vec{x}_0$) :

$$X_{12} - f_2 \cdot \dot{x} = \left(\left(m_2 + m_3 \right) \cdot \ddot{x} \cdot \vec{x}_0 - m_3 \cdot r \cdot \ddot{\theta} \vec{z}_3 - m_3 \cdot r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{x}_3 \right) . \vec{x}_0$$

Homogénéité

- En déduire l'expression de (X_{12}).

$$\Rightarrow \boxed{X_{12} = f_2 \cdot \dot{x} + \left(m_2 + m_3 \right) \cdot \ddot{x} - m_3 \cdot r \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin\theta - m_3 \cdot r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos\theta}$$

Équation 2

Question n°3

- Isoler l'ensemble (1), puis écrire le théorème du moment dynamique en O en projection sur $\vec{x}_0$
- En déduire l'expression de C_{m1} en fonction de X_{12}, x, θ et de leur dérivées. On veillera à éliminer le paramètre φ.
- Enfin donner l'expression de C_{m1} en fonction de x, θ et de leur dérivées.

➢ **On isole l'ensemble (1)**

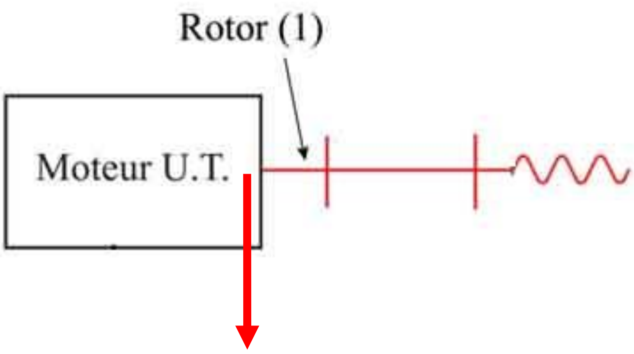
➢ **Bilan d'actions mécaniques sur (1):**

$$\underset{\textit{Hélicoïdale}}{\tau_{2\to1}} == \underset{O}{\left\{ \begin{matrix} -X_{12} & \frac{p_a}{2\pi}.X_{12} \\ -Y_{12} & -M_{12} \\ -Z_{12} & -N_{12} \end{matrix} \right\}}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_i, \vec{z}_i)}$$

hélicoïdale parfaite, pas à droite

$$\tau_{Pes\to1} = \underset{G_1}{\left\{ \begin{matrix} -m_1 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}}$$

$$\tau_{M_1\to1} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_{m1} \cdot \vec{x}_0 \end{matrix} \right\}$$



$$\underset{\textit{Pivot}}{\tau_{0\to1}} = \underset{O}{\left\{ \begin{matrix} X_{01} & -f_1.\dot{\varphi} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{matrix} \right\}}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_i, \vec{z}_i)}$$

pivot de coefficient de frottement visqueux f_1

➢**P.F.D.** Le théorème du moment dynamique en (O) en projection sur ($\vec{x}_0$) permet d'exprimer C_{m1} en fonction de X_{12}

$$\vec{M}_O\,\bar{1} \rightarrow 1 \cdot \vec{x}_0 = \vec{\delta}_O 1/0 \cdot \vec{x}_0$$

☞ Calcul du moment dynamique en O :

$\vec{\delta}_O 1/0 \cdot \vec{x}_0 = J_1 \cdot \ddot{\varphi}$ (Solide en rotation autour d'un axe fixe)

$$C_{m1} - f_1 \cdot \dot{\varphi} + \cancel{\left(\overrightarrow{OG_1} \wedge \left(-m_1 \cdot g \cdot \vec{z}_0\right)\right)} \cdot \vec{x}_0 + \frac{p_a}{2\pi} \cdot X_{12} = J_1 \cdot \ddot{\varphi}$$

$$\boxed{C_{m1} = -\frac{p_a}{2\pi} \cdot X_{12} + f_1 \cdot \dot{\varphi} + J_1 \cdot \ddot{\varphi}}$$ Équation 3

L'hélice du système vis-écrou état à droite, lorsque la pièce 1 tourne dans le sens trigonométrique par rapport à 0 (déplacement angulaire de $+\varphi$), elle se visse dans le sens $+x$ dans le solide 2.
Etant donné que la liaison pivot interdit tout déplacement en translation par rapport au bâti 0 sur la direction x, c'est le solide 2 qui aura un déplacement $-x$ par rapport au bâti 0.

D'où : $\dot{\varphi} \cdot \dfrac{p_a}{2\pi} = -\dot{x} \Rightarrow \dot{\varphi} = -\dfrac{2\pi}{p_a} \cdot \dot{x}$ et $\ddot{\varphi} \cdot \dfrac{p_a}{2\pi} = -\ddot{x} \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\dfrac{2\pi}{p_a} \ddot{x}$ Équations 4 et 5

En remplaçant X_{12}, $\dot{\varphi}$ et $\ddot{\varphi}$ par leur expression dans l'équation 3, on obtient :

$$C_{m1} = -\frac{p_a}{2\pi} \cdot \left(f_2 \cdot \dot{x} + \left(m_2 + m_3\right) \cdot \ddot{x} - m_3 \cdot r \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin\theta - m_3 \cdot r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos\theta\right) - f_1 \cdot \frac{2\pi}{p_a} \cdot \dot{x} - J_1 \cdot \frac{2\pi}{p_a} \cdot \ddot{x}$$

$$\boxed{C_{m1} = -\left(\frac{p_a}{2\pi} \cdot f_2 + \frac{2\pi}{p_a} \cdot f_1\right) \cdot \dot{x} - \left(\frac{p_a}{2\pi} \cdot \left(m_2 + m_3\right) + J_1 \cdot \frac{2\pi}{p_a}\right) \cdot \ddot{x} + \frac{p_a}{2\pi} \cdot m_3 \cdot r \cdot \left(\ddot{\theta} \cdot \sin\theta + \dot{\theta}^2 \cdot \cos\theta\right)}$$

Homogénéité

Équation 6

f_2 en $N/(m \cdot s^{-1})$ ou encore : $N \cdot m^{-1} \cdot s$

f_1 en $N \cdot m/(rad \cdot s^{-1})$ ou encore : $N \cdot m \cdot s$