

EXERCICE 15 – MANIPULATEUR DE C.D.



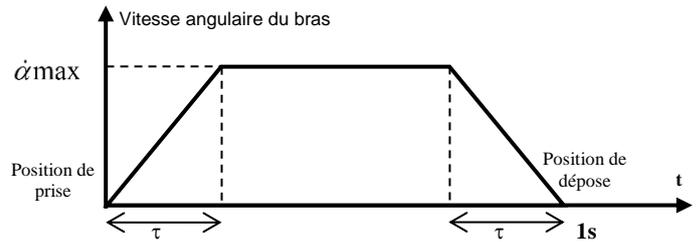
1. Déterminez la vitesse angulaire maximale du bras 1 lors de la phase de transfert.

Etude sur la phase d'accélération :

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{\dot{\alpha}_{\max}}{\tau} = \text{cste}$$

$$\dot{\alpha}(t) = \ddot{\alpha} \cdot t + \dot{\alpha}_0 \text{ avec } \dot{\alpha}_0 = 0$$

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \ddot{\alpha} \cdot t^2 + \alpha_0 \text{ avec } \alpha_0 = 0$$



L'angle parcouru pendant la phase d'accélération sera : $\alpha_1 = \frac{1}{2} \ddot{\alpha} \cdot \tau^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\dot{\alpha}_{\max}}{\tau} \cdot \tau^2 = \frac{\dot{\alpha}_{\max} \cdot \tau}{2}$

L'angle parcouru pendant la phase à vitesses constante sera : $\alpha_2 = \dot{\alpha}_{\max} \cdot (1 - 2\tau)$

L'angle parcouru pendant la phase d'accélération sera : $\alpha_3 = \frac{\dot{\alpha}_{\max} \cdot \tau}{2}$

L'angle total vaut donc $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$

Soit : $2 \left[\frac{\dot{\alpha}_{\max} \cdot \tau}{2} \right] + \dot{\alpha}_{\max} \cdot (1 - 2\tau) = \dot{\alpha}_{\max} \cdot (1 - \tau) = \pi \Rightarrow \dot{\alpha}_{\max} = \frac{\pi}{1 - \tau}$

2. Justifiez par une étude cinématique simple que le solide 2 ne change pas d'orientation pendant le mouvement et qu'à tout instant $\vec{Y}_2 = \vec{Y}_0$. En déduire la nature du mouvement de 2 par rapport au repère d'étude 0.

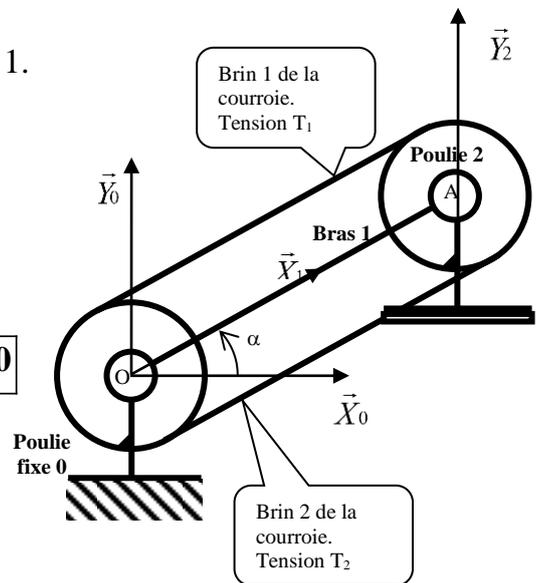
On raisonne en relatif par rapport au repère lié à la pièce 1.

$$\frac{\omega_{P_2/1}}{\omega_{P_1/1}} = + \frac{\text{rayon poulie 1}}{\text{rayon poulie 2}} = 1$$

On revient au référentiel terrestre :

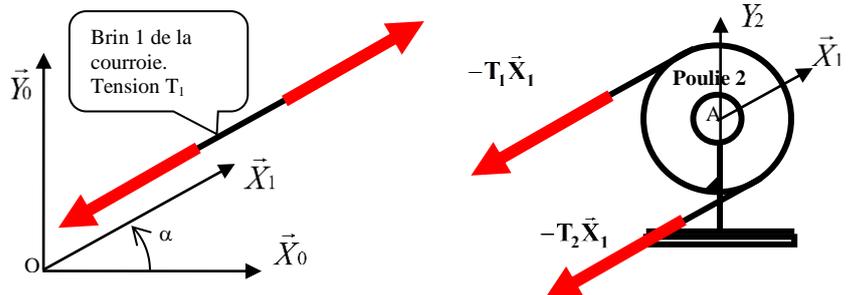
$$\frac{\omega_{P_2/0} - \omega_{1/0}}{\omega_{P_1/0} - \omega_{1/0}} = 1 \Rightarrow \omega_{P_2/0} - \omega_{1/0} = -\omega_{1/0} \Rightarrow \omega_{P_2/0} = 0$$

Le solide P_2 est donc animé d'un mouvement de translation à trajectoire circulaire tel que la trajectoire $T(A \in P_2 / 1)$ est un cercle de rayon OA .



3. Sur une figure, représentez les actions mécaniques des brins 1 et 2 sur les poulies. Justifiez votre construction.

Si on isole un brin de la courroie, est soumis à deux glisseurs. La masse étant négligeable, le PFD devient équivalent au PFS. On peut donc appliquer le théorème d'un solide soumis à deux glisseurs.



4. Ecrire les équations scalaires issues du PFD appliqué au solide 2. On écrira l'équation de moment en A. Choisir judicieusement la base de projection.

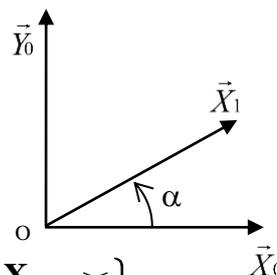
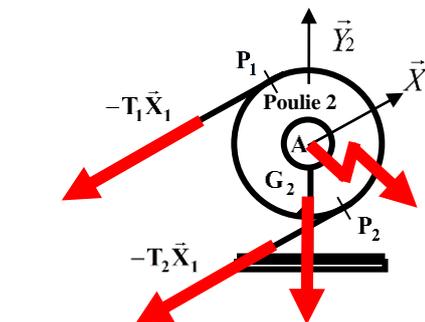
- On isole 2
- B.a.m.e. :

- Le poids en G_2 {Poids \rightarrow 2} = $\begin{Bmatrix} -M_2 \mathbf{g} \cdot \vec{Y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_2, B_0}$

\Rightarrow {Poids \rightarrow 2} = $\begin{Bmatrix} -M_2 \mathbf{g} \cdot \sin \alpha & 0 \\ -M_2 \mathbf{g} \cdot \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G_2, B_1}$

- Les tensions {Brin 1 \rightarrow 2} = $\begin{Bmatrix} -T_1 \cdot \vec{X}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{P_1}$

{Brin 2 \rightarrow 2} = $\begin{Bmatrix} -T_2 \cdot \vec{X}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{P_2}$



	\vec{X}_1	\vec{Y}_1
\vec{X}_0	$C\alpha$	$-S\alpha$
\vec{Y}_0	$S\alpha$	$C\alpha$

- L'action de 1 \rightarrow 2 dans la liaison pivot. {1 \rightarrow 2} = $\begin{Bmatrix} \vec{X}_A & \times \\ \vec{Y}_A & \times \\ \times & \vec{0} \end{Bmatrix}_{A, B_1}$

Ecriture des moments en A :

On note que le torseur a été écrit directement en A avec un moment nul. En effet, le poids est un glisseur dont l'axe central passe par le point A.

On peut aussi le démontrer ainsi :

$$\overline{\mathbf{M}_A \text{ Poids } \rightarrow 2} = \overline{\mathbf{M}_{G_2} \text{ Poids } \rightarrow 2} + \overline{\mathbf{A}G_2} \wedge -M_2 \mathbf{g} \vec{Y}_2 = -\mathbf{b} \cdot \vec{Y}_2 \wedge -M_2 \mathbf{g} \vec{Y}_2 = \vec{0}$$

Nota : il est plus rapide de dire que le poids est un glisseur qui passe par A donc son moment est nul en A.

$$\overline{\mathbf{M}_A \text{ Brin 1 } \rightarrow 2} = \overline{\mathbf{A}P_1} \wedge -T_1 \vec{X}_1 = \mathbf{R} \cdot \vec{Y}_1 \wedge -T_1 \cdot \vec{X}_1 = \mathbf{R} \cdot T_1 \cdot \vec{Z}$$

$$\overline{\mathbf{M}_A \text{ Brin 2 } \rightarrow 2} = \overline{\mathbf{A}P_2} \wedge -T_2 \vec{X}_1 = -\mathbf{R} \cdot \vec{Y}_1 \wedge -T_2 \cdot \vec{X}_1 = -\mathbf{R} \cdot T_2 \cdot \vec{Z}$$

Calcul du torseur dynamique :

$$\overline{\mathbf{V}(A, 2/0)} = \overline{\mathbf{V}(A, 2/1)} + \overline{\mathbf{V}(A, 1/0)} = \overline{\mathbf{A}O} \wedge \dot{\alpha} \cdot \vec{Z} = -L \cdot \vec{X}_1 \wedge \dot{\alpha} \cdot \vec{Z} = L \dot{\alpha} \cdot \vec{Y}_1$$

$$\overline{\mathbf{\Gamma}(A, 2/0)} = \frac{d[\overline{\mathbf{V}(A, 2/0)}]}{dt/B_0} = \frac{d[L \dot{\alpha} \cdot \vec{Y}_1]}{dt/B_0} = L \ddot{\alpha} \cdot \vec{Y}_1 - L \dot{\alpha}^2 \cdot \vec{X}_1$$

$$\overline{\sigma_A 2/0} = \overline{\mathbf{I}(A, 2)} \cdot \overline{\mathbf{\Omega} 2/0} + \overline{\mathbf{A}G_2} \wedge M_2 \cdot \overline{\mathbf{V}(A, 2/0)} = -\mathbf{b} \vec{Y}_2 \wedge M_2 \cdot L \dot{\alpha} \cdot \vec{Y}_1 = -M_2 \mathbf{b} L \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{Z}$$

$$\overline{\delta_A 2/0} = \frac{d[\overline{\sigma_A 2/0}]}{dt/B_0} + M_2 \cdot \overline{\mathbf{V}(A, 2/0)} \wedge \overline{\mathbf{V}(G, 2/0)} \Leftrightarrow$$

$$\overline{\delta_A 2/0} = [-M_2 \mathbf{b} L \cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 - M_2 \mathbf{b} L \sin \alpha \cdot \ddot{\alpha}] \cdot \vec{Z}$$

➤ PFD Théorème de la résultante : $\overline{\mathbf{R} 2 \rightarrow 2} = M_2 \cdot \overline{\mathbf{\Gamma}(G_2, 2/0)}$

$$\mathbf{X}_A - M_2 \mathbf{g} \cdot \sin \alpha - T_1 - T_2 = -M_2 L \dot{\alpha}^2$$

$$\mathbf{Y}_A - M_2 \mathbf{g} \cdot \cos(\alpha) = M_2 L \ddot{\alpha}$$

➤ PFD Théorème du moment dynamique en A :

$$\overline{\mathbf{M}_A \mathbf{2} \rightarrow \mathbf{2}} = \overline{\delta_A \mathbf{2} / \mathbf{0}}$$

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{T}_1 - \mathbf{R} \cdot \mathbf{T}_2 = -M_2 b L \cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 - M_2 b L \sin \alpha \cdot \ddot{\alpha}$$

5. *Ecrire les équations scalaires issues du PFD appliqué au système E = (1+2). On écrira l'équation de moment en O.*

➤ On isole 1 ∪ 2

➤ B.a.m.e. :

- L'action de 0 → 1 dans la liaison pivot motorisée.

$$\{ \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2} \} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_O & \times \\ \mathbf{Y}_O & \times \\ \times & \mathbf{Cm} \end{Bmatrix}_{O, B_1}$$

- Les tensions $\{ \mathbf{Brin 1} \rightarrow \mathbf{2} \} = \{ -\mathbf{T}_1 \cdot \vec{\mathbf{X}}_1 \}_{P_1}$

$$\{ \mathbf{Brin 2} \rightarrow \mathbf{2} \} = \{ -\mathbf{T}_2 \cdot \vec{\mathbf{X}}_1 \}_{P_2}$$

- Le poids du solide 2 en \mathbf{G}_2

$$\{ \mathbf{Poids} \rightarrow \mathbf{2} \} = \begin{Bmatrix} -M_2 \mathbf{g} \cdot \vec{\mathbf{Y}}_0 \\ \vec{\mathbf{0}} \end{Bmatrix}_{G_2, B_0} \quad \text{ou encore} \quad \{ \mathbf{Poids} \rightarrow \mathbf{2} \} = \begin{Bmatrix} -M_2 \mathbf{g} \cdot \sin \alpha & \mathbf{0} \\ -M_2 \mathbf{g} \cdot \cos \alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Bmatrix}_{A, B_1}$$

- Le poids du solide 1 en \mathbf{G}_1

$$\{ \mathbf{Poids} \rightarrow \mathbf{1} \} = \begin{Bmatrix} -M_1 \mathbf{g} \cdot \vec{\mathbf{Y}}_0 \\ \vec{\mathbf{0}} \end{Bmatrix}_{G_2, B_0} \quad \text{ou encore} \quad \{ \mathbf{Poids} \rightarrow \mathbf{2} \} = \begin{Bmatrix} -M_1 \mathbf{g} \cdot \sin \alpha & \mathbf{0} \\ -M_1 \mathbf{g} \cdot \cos \alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Bmatrix}_{G_1, B_1}$$

Ecriture des moments en A :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{M}_O \mathbf{Poids} \rightarrow \mathbf{2}} &= \overline{\mathbf{M}_{G_2} \mathbf{Poids} \rightarrow \mathbf{2}} + \overline{\mathbf{O} \mathbf{G}_2} \wedge -M_2 \mathbf{g} \vec{\mathbf{Y}}_2 = \left[\overline{\mathbf{O} \mathbf{A}} + \overline{\mathbf{A} \mathbf{G}_2} \right] \wedge -M_2 \mathbf{g} \vec{\mathbf{Y}}_2 \\ &= L \cdot \vec{\mathbf{X}}_1 \wedge -M_2 \mathbf{g} \vec{\mathbf{Y}}_2 = -M_2 L \mathbf{g} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cdot \vec{\mathbf{Z}} = -M_2 L \mathbf{g} \cos(\alpha) \cdot \vec{\mathbf{Z}} \end{aligned}$$

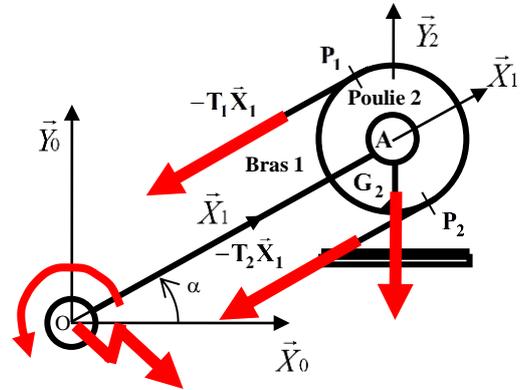
$$\overline{\mathbf{M}_O \mathbf{Poids} \rightarrow \mathbf{1}} = -M_1 \mathbf{g} \cos(\alpha) \cdot \vec{\mathbf{Z}}$$

$$\overline{\mathbf{M}_O \mathbf{Brin 1} \rightarrow \mathbf{2}} = \overline{\mathbf{M}_A \mathbf{Brin 2} \rightarrow \mathbf{2}} + \overline{\mathbf{O} \mathbf{A}} \wedge -\mathbf{T}_1 \vec{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{T}_1 \cdot \vec{\mathbf{Z}}$$

$$\overline{\mathbf{M}_O \mathbf{Brin 2} \rightarrow \mathbf{2}} = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \vec{\mathbf{Z}}$$

$$\overline{\sigma_O \mathbf{1} / \mathbf{0}} = \overline{\mathbf{I}(\mathbf{O}, \mathbf{1}) \cdot \vec{\Omega} \mathbf{1} / \mathbf{0}} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = C \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{\mathbf{Z}} \Rightarrow \overline{\delta_O \mathbf{1} / \mathbf{0}} = C \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{\mathbf{Z}}$$

$$\overline{\delta_O \mathbf{1} / \mathbf{0}} = \frac{d[\overline{\sigma_O \mathbf{1} / \mathbf{0}}]}{dt / B_0} = \frac{d[C \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{\mathbf{Z}}]}{dt / B_0} \Rightarrow \overline{\delta_O \mathbf{1} / \mathbf{0}} = C \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{\mathbf{Z}}$$



$$\overline{\delta_{O2/0}} = \overline{\delta_A2/0} + \overline{OA} \wedge \overline{M_2 \cdot \Gamma(G_2, 2/0)} = \overline{\delta_A2/0} + L \cdot \vec{X}_1 \wedge M_2 \cdot [L\ddot{\alpha} \cdot \vec{Y}_1 - L\dot{\alpha}^2 \cdot \vec{X}_1] \Rightarrow$$

$$\overline{\delta_{O2/0}} = -M_2 b L \cos(\alpha) \dot{\alpha}^2 \cdot \vec{Z} - M_2 b L \sin(\alpha) \ddot{\alpha} \cdot \vec{Z} + M_2 \cdot L^2 \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{Z}$$

➤ PFD Théorème de la résultante :

$$\overline{R_{1 \cup 2} \rightarrow 1 \cup 2} = \overline{M_1 \cdot \Gamma(G_1, 2/0)} \cdot \overline{M_2 \cdot \Gamma(G_2, 2/0)}$$

$$X_O - [M_2 + M_1] g \cdot \sin \alpha - T_1 \cdot \vec{X}_1 - T_2 \cdot \vec{X}_1 = -M_2 L \dot{\alpha}^2 - M_1 a \dot{\alpha}^2$$

$$Y_O - [M_2 + M_1] \cdot g \cdot \cos \alpha = M_2 L \ddot{\alpha} + M_1 a \ddot{\alpha}$$

➤ PFD Théorème du moment dynamique en O :

$$\overline{M_O \text{ Brin } 1 \cup 2 \rightarrow 1 \cup 2} \cdot \vec{Z} = \overline{\delta_{O2/0}} \cdot \vec{Z} + \overline{\delta_{O1/0}} \cdot \vec{Z}$$

$$-M_2 L g \cos \alpha - M_1 a g \cos \alpha + R \cdot [T_1 - T_2] + C_m =$$

$$C \cdot \ddot{\alpha} - M_2 b L \cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 - M_2 b L \sin \alpha \cdot \ddot{\alpha} + M_2 L^2 \cdot \ddot{\alpha}$$

On a vu par ailleurs que : $R \cdot T_1 - R \cdot T_2 = -M_2 b L \cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 - M_2 b L \sin \alpha \cdot \ddot{\alpha}$

On obtient alors $-M_2 L g \cos \alpha - M_1 a g \cos \alpha + R \cdot [T_1 - T_2] + C_m =$

$$C \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{Z} - \cancel{M_2 b L \cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2} - \cancel{M_2 b L \sin \alpha \cdot \ddot{\alpha}} + M_2 \cdot L^2 \cdot \ddot{\alpha}$$

$$\Rightarrow -[M_2 L + M_1 a] \cdot g \cos \alpha + C_m = C \cdot \ddot{\alpha} + M_2 \cdot L^2 \cdot \ddot{\alpha}$$

6. Dédurre des équations précédentes, le couple moteur C_m en fonction de α et de ses dérivées ainsi que des données g, M_1, M_2, C, a, b, L .

$$C_m = C \cdot \ddot{\alpha} + M_2 \cdot L^2 \cdot \ddot{\alpha} + [M_2 L + M_1 a] \cdot g \cos \alpha$$

7. Montrez qu'il est impossible de calculer les tensions T_1 et T_2 dans la courroie. Expliquez pourquoi.

Lors de l'isolement du solide 2, le b.a.m.e fait apparaître 5 inconnues d'effort sur la liaison pivot en A et deux inconnues sur les brins des courroies.

Si on définit les conditions du fonctionnement au travers des paramètres cinématiques : l'accélération angulaire, la vitesse angulaire et la position angulaire, il nous reste 7 inconnues pour six équations.

On pourra calculer $R \cdot [T_1 - T_2]$ le moment engendré par la tension des deux brins mais chaque brin comportera une tension initiale (ou tension de pose).

On parle d'un brin tendu et d'un brin mou et on voit que si on ajoute la même valeur d'effort à T_1 et à T_2 , le moment engendré ne changera pas.

Rappel : si T_2 est le brin tendu et T_1 le brin mou, on a la relation qui donne la valeur maximale acceptable pour T_2 lorsqu'on est à la limite du glissement.

Elle s'exprime $T_2 = T_1 \cdot e^{f \cdot \theta}$ ou f est le coefficient d'adhérence entre la courroie et la poulie et θ l'angle d'enroulement.