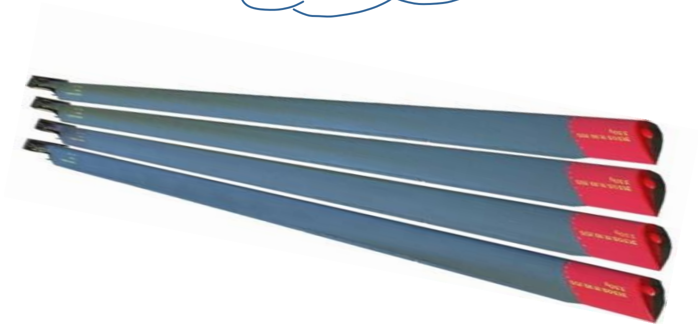
EXERCICE 14 VOL D'UN D'HELICOPTERE

Partie 1 : Géométrie de la voilure

Corrigé

Il est solidaire du repère $\boldsymbol{R_2} : (A, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$

Eurocopter EC-135



Chacune de ses pales de longueur $\boldsymbol{2L}$, de largeur $\boldsymbol{a}$ et de masse notée $\boldsymbol{M}$. $\alpha = (\vec{y}, \overrightarrow{u_1}) = (\vec{z}, \overrightarrow{v_1})$

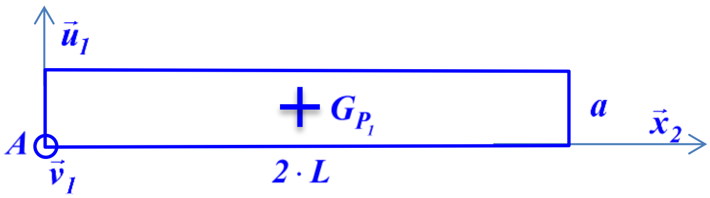
$\boldsymbol{R_{P_1}} : (A, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1})$ est le repère qui lui est associé.

Travail demandé :

Q1 - Ecrire l'opérateur d'inertie $\overline{\overline{I_A(P_1)}}$ de la pale $\boldsymbol{P_1}$ dans le repère $\boldsymbol{R_{P_1}}$.

Matrice de la pale $\boldsymbol{P_1}$ exprimée dans le repère $\boldsymbol{R'_{P_1}} : (G_{P_1}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1})$

$$\overline{\overline{I_{G_{P_1}}(P_1)}} = \begin{pmatrix} \dfrac{Ma^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{M(2L)^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{M(a^2+4L^2)}{12} \end{pmatrix}_{B_{P_1}}$$



Matrice de la pale $\boldsymbol{P_1}$ exprimée dans le repère $\boldsymbol{R_{P_1}} : (A, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1})$

On applique Huygens avec $\overrightarrow{AG} = 2L \cdot \overrightarrow{x_2} + a/2 \cdot \overrightarrow{u_1}$

$$\overline{\overline{I_A(P_1)}} = \begin{pmatrix} \dfrac{Ma^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{M(2L)^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{M(a^2+4L^2)}{12} \end{pmatrix}_{B_{P_1}} + \begin{pmatrix} M\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 & \dfrac{-MaL}{2} & 0 \\ \dfrac{-MaL}{2} & ML^2 & 0 \\ 0 & 0 & M\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + ML^2 \end{pmatrix}_{B_{P_1}}$$

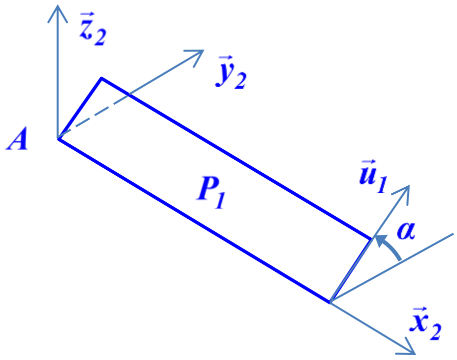
$$\overline{\overline{I_A(P_1)}}=\begin{pmatrix}\dfrac{Ma^2}{3} & \dfrac{-MLa}{2} & 0\\ \dfrac{-MLa}{2} & \dfrac{4ML^2}{3} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{Ma^2}{3}+\dfrac{4ML^2}{3}\end{pmatrix}_{B_{P_1}}$$

On note cette matrice :

$$\overline{\overline{I_{G_{P_1}}(P_1)}}=\begin{pmatrix}A_{11} & -F_{11} & 0\\ -F_{11} & B_{11} & 0\\ 0 & 0 & C_{11}\end{pmatrix}_{B_{P_1}}$$

Q2 - Déterminer les moments d'inertie $\underset{Pale\ P_1}{I_{Ax_2}}$, $\underset{Pale\ P_1}{I_{Ay_2}}$ et $\underset{Pale\ P_1}{I_{Az_2}}$ dans le repère $\boldsymbol{R_2}$.

On exprime les vecteurs de la base 2 dans la base de la pale $\boldsymbol{P_1}$



On note A_{12} , B_{12} *et* C_{12} les moments d'inertie cherché

$\underset{Pale\ P_1}{I_{Ax_2}}$ *est inchangé* $\boxed{A_{12}=A_{11}}$

$\underset{Pale\ P_1}{I_{Ay_2}}$ *est obtenu avec la relation* $B_{12}=\vec{y}_2\cdot\left(\overline{\overline{I_{G_{P_1}}(P_1)}}\cdot\vec{y}_2\right)$

$$=\begin{pmatrix}0\\ C\alpha\\ -S\alpha\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}A_{11} & -F_{11} & 0\\ -F_{11} & B_{11} & 0\\ 0 & 0 & C_{11}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ C\alpha\\ -S\alpha\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0\\ C\alpha\\ -S\alpha\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\ B_{11}\cdot C\alpha\\ -C_{11}\cdot S\alpha\end{pmatrix}\right]$$

	$\vec{x}_2$	$\vec{u}_1$	$\vec{v}_1$
$\vec{x}_2$	1	0	0
$\vec{y}_2$	0	$C\alpha$	$-S\alpha$
$\vec{z}_2$	0	$S\alpha$	$C\alpha$

$$\boxed{B_{12}=B_{11}\cdot(\cos\alpha)^2+C_{11}\cdot(\sin\alpha)^2}$$

$\underset{Pale\ P_1}{I_{Az_2}}$ *est obtenu avec la relation* $C_{12}=\vec{z}_2\cdot\left(\overline{\overline{I_{G_{P_1}}(P_1)}}\cdot\vec{z}_2\right)$

$$=\begin{pmatrix}0\\ S\alpha\\ C\alpha\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}A_{11} & -F_{11} & 0\\ -F_{11} & B_{11} & 0\\ 0 & 0 & C_{11}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ S\alpha\\ C\alpha\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0\\ S\alpha\\ C\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ B_{11}\cdot S\alpha\\ C_{11}\cdot C\alpha\end{pmatrix}=B_{11}\cdot(\sin\alpha)^2+C_{11}\cdot(\cos\alpha)^2$$

D'où la diagonale de la matrice de la pale $\boldsymbol{P_1}$ *exprimée A dans le repère* $\boldsymbol{R_2}:(A,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})$

$$\overline{\overline{I_A(P_1)}}=\begin{pmatrix}\dfrac{Ma^2}{3} & ? & ?\\ ? & \dfrac{4ML^2}{3}+\dfrac{Ma^2}{3}\cdot(\sin\alpha)^2 & ?\\ ? & ? & \dfrac{4ML^2}{3}+\dfrac{Ma^2}{3}\cdot(\cos\alpha)^2\end{pmatrix}_{B_2}$$

Q3 - En déduire $\underset{S_{2A}}{I_{Ax_2}}$, $\underset{S_{2A}}{I_{Ay_2}}$ et $\underset{S_{2A}}{I_{Az_2}}$ dans le repère $\boldsymbol{R_2}$.

Le rotor est constitué de 4 pales

Si on considère les pales $1 \cup 3$:

$$\underset{1\cup 3}{I_{Ax_2}} = 2 \cdot \underset{Pale\ P_1}{I_{Ax_2}} = 2A_{12}$$

Si on considère les pales $2 \cup 4$

la disposition identique / à l'axe $(A, \vec{y}_2)$

permet d'écrire : $\underset{2\cup 4}{I_{Ay_2}} = 2 \cdot \underset{Pale\ P_1}{I_{Ax_2}} = 2A_{12}$

On recommence le même raisonnement avec $\underset{1\cup 3}{I_{Ay_2}} = 2 \cdot \underset{Pale\ P_1}{I_{Ay_2}} = 2B_{12}$

Si on considère les pales $2 \cup 4$

la disposition identique / à l'axe $(A, \vec{x}_2)$

permet d'écrire : $\underset{2\cup 4}{I_{Ax_2}} = 2 \cdot \underset{Pale\ P_1}{I_{Ay_2}} = 2A_{12}$

Regroupons les I_{Ax_2} pour les 4 pales :

$$\underset{1\cup 3\cup 2\cup 4}{I_{Ax_2}} = 2 \cdot \underset{Pale\ P_1}{I_{Ax_2}} + 2 \cdot \underset{Pale\ P_1}{I_{Ay_2}} = 2A_{12} + 2B_{12}$$

La disposition de l'ensemble des quatre pales par rapport à l'axe $(A, \vec{x}_2)$ est la même que par rapport à l'axe $(A, \vec{y}_2)$ on obtient donc aussi :

$$\underset{1\cup 3\cup 2\cup 4}{I_{Ay_2}} = 2A_{12} + 2B_{12}$$

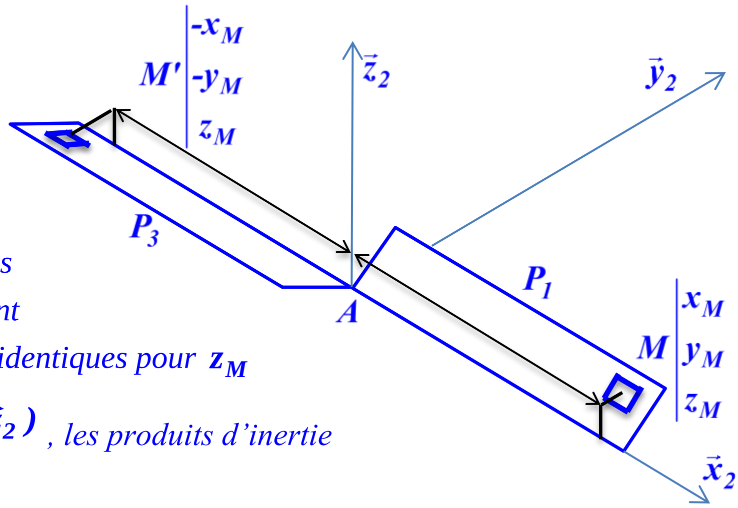
Enfin , la disposition des quatre pales par rapport à l'axe $(A, \vec{z}_2)$ est la même.

$$\underset{1\cup 3\cup 2\cup 4}{I_{Az_2}} = 4C_{12}$$

D'où la diagonale de la matrice du rotor exprimée A dans le repère $\boldsymbol{R_2} : (A, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$

$$\overline{\overline{I_A(P_1)}} = \begin{pmatrix} \frac{2M}{3}\cdot\left(4L^2 + a^2\left(1+\sin^2\alpha\right)\right) & ? & ? \\ ? & \frac{2M}{3}\cdot\left(4L^2 + a^2\left(1+\sin^2\alpha\right)\right) & ? \\ ? & ? & \frac{4M}{3}\left(4L^2 + a^2\left(\cos\alpha\right)^2\right) \end{pmatrix}_{B_2}$$

Q4 - En considérant globalement la voilure tournante munie de ses 4 pales, déterminer les produits d'inertie $\underset{S_{2A}}{I_{yz}}$, $\underset{S_{2A}}{I_{zx}}$ et $\underset{S_{2A}}{I_{xy}}$.



__Considérons deux pales opposées__ :

Pour tout éléments de matière $\boldsymbol{dM}$ *situés en* $\boldsymbol{M}$, *il existe un élément de matière identique disposé symétriquement par rapport à l'axe* $(A, \vec{z}_2)$ *en* $\boldsymbol{M'}$ *dont les coordonnées dans le repère* $\boldsymbol{R_2}$ *ne diffèrent pour* x_M *et* y_M *que par les signes et sont identiques pour* z_M

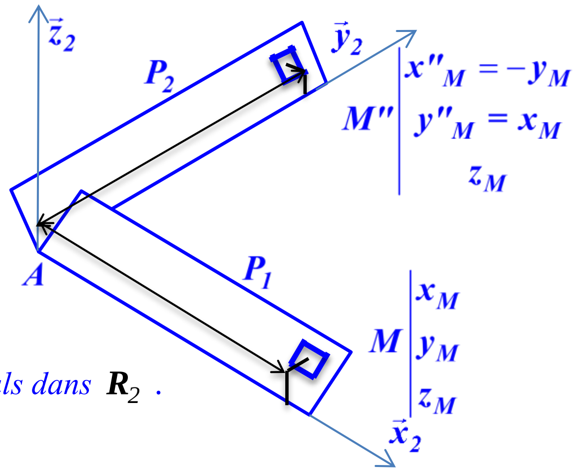
Compte-tenu de cette symétrie d'axe $(A, \vec{z}_2)$ *, les produits d'inertie*

$$\underset{1\cup 3}{I_{zx}} = \int_{1\cup 3} zx.dm = 0 \qquad \text{et} \qquad \underset{1\cup 3}{I_{yz}} = \int_{1\cup 3} yz.dm = 0$$

Par contre on observe que $xy = (-x)\cdot(-y)$ $\Rightarrow \underset{1\cup 3}{I_{xy}} = \int_{1\cup 3} xy.dm \neq 0$

Avec un même raisonnement on montre que pour $\underset{2\cup 4}{I_{zx}} = \underset{2\cup 4}{I_{yz}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underset{S_{2A}}{I_{zx}} = \underset{S_{2A}}{I_{yz}} = 0}$

__Considérons maintenant deux pales adjacentes__ :



Pour tout éléments de matière $\boldsymbol{dM}$ *situés en* $\boldsymbol{M}$, *il existe un élément de matière en* $\boldsymbol{M''}$ *obtenu par rotation de* $\pi/2$ *autour de l'axe* $(A, \vec{z}_2)$.

$$\underset{1\cup 2}{I_{xy}} = \int_{1\cup 2} xy.dm = 0$$

De même $\underset{3\cup 4}{I_{xy}} = \int_{3\cup 4} xy.dm = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underset{S_{2A}}{I_{xy}} = 0}$

On en déduit que tous les produit d'inertie du rotor sont nuls dans $\boldsymbol{R_2}$.

Q5 - Ecrire la matrice d'inertie $\overline{\overline{I_A(S_{2A})}}$ dans le repère $\boldsymbol{R_2}$.

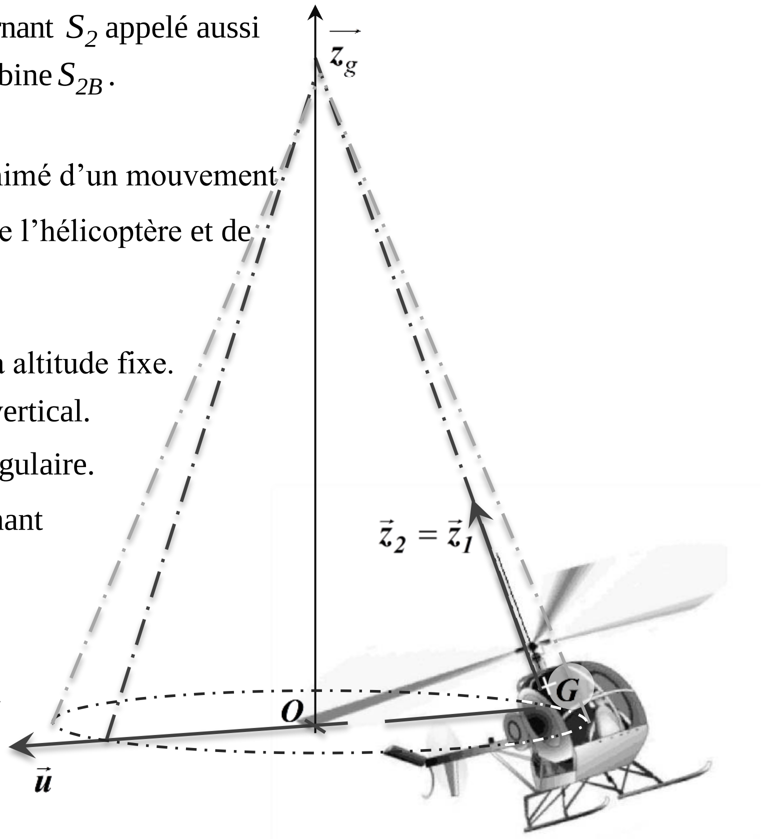
$$\overline{\overline{I_A(S_{2A})}} = \begin{pmatrix} \frac{2M}{3}\cdot\left(4L^2 + a^2\left(1+\sin^2\alpha\right)\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2M}{3}\cdot\left(4L^2 + a^2\left(1+\sin^2\alpha\right)\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4M}{3}\left(4L^2 + a^2\left(\cos\alpha\right)^2\right) \end{pmatrix}_{B_2}$$

Q6 - Quelle devient l'écriture de la matrice $\overline{\overline{I_A(S_{2A})}}$ dans le repère $\boldsymbol{R_1}$.

La matrice étant de la même forme que celle d'un solide de révolution d'axe $(A, \vec{z}_2)$, *elle sera inchangée par rotation autour de cet axe.*

Comme le repère $\boldsymbol{R_1}$ *est en rotation d'axe* $(A, \vec{z}_2)$ *par rapport* $\boldsymbol{R_1}$ *la matrice sera inchangée.*

Partie 2 : Etude des couples en vol



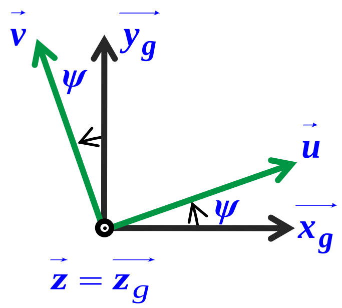
On considère pour la suite de l'étude, l'ensemble tournant S_2 appelé aussi rotor, constitué de la voilure S_{2A} et du rotor de turbine S_{2B}.
Son centre d'inertie est noté G.

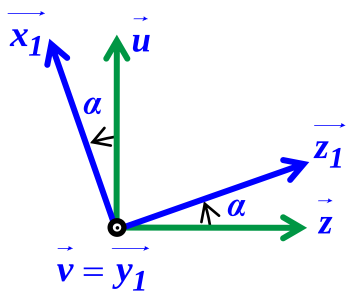
S_2 est considéré comme un solide indéformable animé d'un mouvement de rotation d'axe $(G, \overrightarrow{z_1})$ par rapport à la cellule de l'hélicoptère et de vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \omega_2 \cdot \overrightarrow{z_1} = \dot{\varphi} \cdot \overrightarrow{z_1}$.

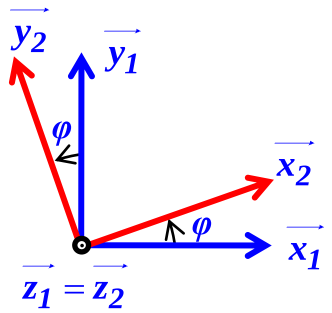
L'hélicoptère est dans une phase de vol circulaire à altitude fixe.
G décrit un cercle d'axe $(O, \overrightarrow{z_g})$ tel que $\overrightarrow{z_g}$ est vertical.
R est le rayon du cercle et $\omega_1 = \dot{\psi}$ est la vitesse angulaire.
On pose $\overrightarrow{GO} = R \cdot \vec{u}$ et on définit un repère tournant $\boldsymbol{R_1} : (O, \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{z_g})$.
On peut observer que l'axe $(G, \overrightarrow{z_1})$ décrit un cône d'axe $(O, \overrightarrow{z_g})$ vertical et de demi-angle au sommet $\alpha = cste$.

L'opérateur d'inertie du rotor est de la forme :

$$\overline{\overline{I_G(S_2)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{G,R_2}$$







Q7 - Déterminer l'expression de la projection du moment dynamique $\overrightarrow{\delta_G(S_2)} \cdot \vec{z}_2$.

$$\overrightarrow{\Omega_{S_2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{S_2/S_1}} + \overrightarrow{\Omega_{S_1/0}} = \dot{\varphi} \cdot \vec{z}_1 + \dot{\psi} \cdot \vec{z}$$

Projetons dans B1

	$\vec{x}_2$	$\vec{y}_2$
$\vec{x}_1$	$C\alpha$	$-S\alpha$
$\vec{y}_1$	$S\alpha$	$C\alpha$

	$\vec{z}_1$	$\vec{x}_1$
$\vec{z}$	$C\alpha$	$-S\alpha$
$\vec{u}$	$S\alpha$	$C\alpha$

$$\overrightarrow{\Omega_{S_2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{S_2/S_1}} + \overrightarrow{\Omega_{S_1/0}} = -\dot{\psi} \cdot \sin\alpha \, \vec{x}_1 + \dot{\psi} \cdot \cos\alpha \cdot \vec{z}_1 + \dot{\varphi} \, \vec{z}_1$$

$$\overrightarrow{V_{G\in S_2/0}} = \overrightarrow{V_{G\in S_1/0}} = \cancel{\overrightarrow{V_{O\in S_1/0}}} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S_1/0}} = R\vec{u} \wedge \dot{\psi}\cdot\vec{z} = -R\dot{\psi}\cdot\vec{v}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{G,S_2/0}} = \overline{\overline{I_G(S_2)}}\cdot\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{B_1} \cdot \begin{pmatrix} -\dot{\psi}\cdot sin\alpha \\ 0 \\ \dot{\psi}\cdot cos\alpha + \dot{\varphi} \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} -A\dot{\psi}\cdot sin\alpha \\ 0 \\ C\cdot\left(\dot{\psi}\cdot cos\alpha + \dot{\varphi}\right) \end{pmatrix}_{B_1}$$

$$\overrightarrow{\delta_{G,S_2/0}} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{G,S_2/0}}}{dt}\right|_{B_0} \quad \textit{car le calcul a lieu en G cdg de } S_2$$

$$\overrightarrow{\delta_{G,S_2/0}}\cdot\vec{z}_1 = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{G,S_2/0}}}{dt}\right|_{B_0}\cdot\vec{z}_1 = \frac{d\overrightarrow{\sigma_{G,S_2/0}}\cdot\vec{z}_1}{dt} - \overrightarrow{\sigma_{G,S_2/0}}\cdot\left.\frac{d\,\vec{z}_1}{dt}\right|_{B_0}$$

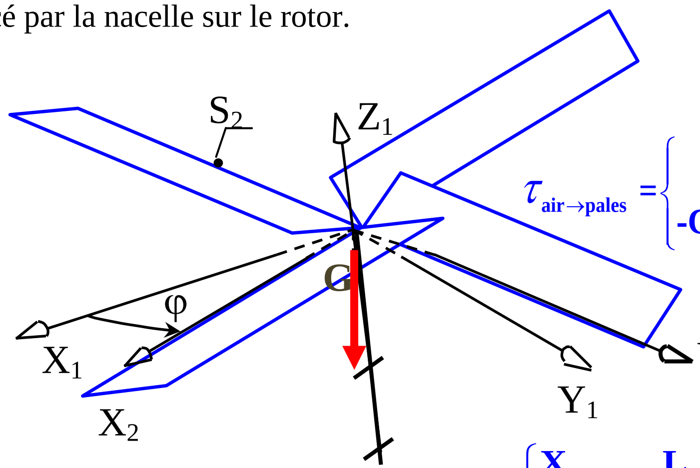
$$\textit{Avec } \left.\frac{d\,\vec{z}_1}{dt}\right|_{B_0} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{z}_1 = \dot{\psi}\cdot\vec{z}\wedge\vec{z}_1 = \dot{\psi}\cdot sin\alpha\cdot\vec{y}_1 \textit{ perpendiculaire à } \overrightarrow{\sigma_{G,S_2/0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\delta_{G,S_2/0}}\cdot\vec{z}_1 = \frac{d\overrightarrow{\sigma_{G,S_2/0}}\cdot\vec{z}_1}{dt} = C\cdot\left(\ddot{\psi}\cdot cos\alpha + \ddot{\varphi}\right)}$$

Q8 - Proposer un isolement, un Bame et indiquer l'équation qui permettra d'obtenir l'expression du couple moteur $C_{S_1\to S_2}$ exercé par la nacelle sur le rotor.

➢ **<u>On isole le rotor</u>**

➢ **<u>Bilan des actions mécaniques.</u>**
(B.A.M.E.)



$$\tau_{air\to pales} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{air\to pales} \\ -\mathbf{C}_{air\to pales}\vec{\mathbf{Z}}_1 \end{Bmatrix}$$

$$\tau_{Moteur\to 2} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \mathbf{C_m}\vec{\mathbf{Z}}_1 \end{Bmatrix}$$

$$\tau_{Pes\to 2} = {}_{G}\begin{Bmatrix} -\mathbf{m}\cdot\mathbf{g}\cdot\vec{\mathbf{Z}}_g \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \qquad \tau_{1\to 2} = {}_{O}\begin{Bmatrix} \mathbf{X}_{1\to 2} & \mathbf{L}_{1\to 2} \\ \mathbf{Y}_{1\to 2} & \mathbf{M}_{1\to 2} \\ \mathbf{Z}_{1\to 2} & 0 \end{Bmatrix}_{B_1}$$

On observe qu'il n'y a pas d'inconnues d'efforts de liaison pour le moment sur l'axe $(\mathbf{O},\vec{\mathbf{Z}}_1)$

☞Action de la pesanteur : moment nul en **G**

On appliquera donc le théorème du moment dynamique en projection sur l'axe $(\mathbf{G},\vec{\mathbf{Z}}_1)$.

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{C_m} - \mathbf{C}_{air\to pales} = C\cdot\left(\ddot{\psi}\cdot cos\alpha + \ddot{\varphi}\right)}$$

Q9 - Monter qu'il existe un couple $C_{S_2 \to S_1}$.

Si le moteur agit sur $\boldsymbol{S_2}$*, avec le moment* $\mathbf{C_m \vec{Z}_1}$*, son stator est solidaire* $\boldsymbol{S_1}$

L'action réciproque s'exerçant sur $\boldsymbol{S_1}$ *est donc un couple de moment* $\mathbf{C_{S_2 \to S_1} = -C_m \vec{Z}_1}$

La conséquence est que la nacelle de l'hélicoptère est entrainée en rotation.

Il faut donc prévoir un dispositif qui compensera ce moment.

Quelles sont les solutions habituellement apportées ?

Hélice contre-réactive

Hélice de queue

Deux hélices tournant en sens opposés.