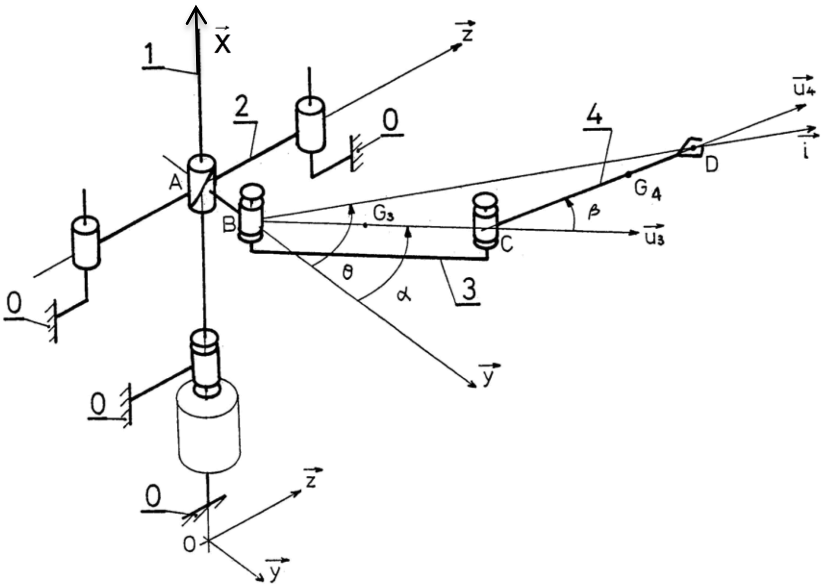
EXERCICE 12 ROBOT DE MANUTENTION SCARA SR-1504HZ

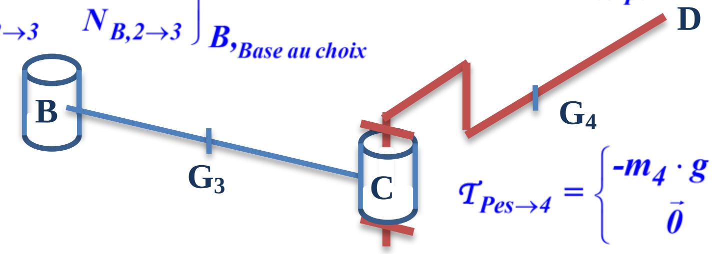


- **PREMIERE ETUDE:**

Q1 - Isoler l'ensemble $3 \cup 4$ et dresser le bilan des actions mécaniques extérieures.

- **On isole S_1.**
- **B.A.M.E.**

$$\mathcal{T}_{2\to 3} = \begin{Bmatrix} X_{2\to 3} & 0 \\ Y_{2\to 3} & M_{B,2\to 3} \\ Z_{2\to 3} & N_{B,2\to 3} \end{Bmatrix}_{B,\text{Base au choix}} \qquad \mathcal{T}_{Moteur2\to 3} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{23}\cdot\vec{x} \end{Bmatrix}_{\forall \text{le pt}}$$



$$\mathcal{T}_{Pes\to 4} = \begin{Bmatrix} -m_4\cdot g\cdot\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_4}$$

$$\mathcal{T}_{Pes\to 3} = \begin{Bmatrix} -m_3\cdot g\cdot\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_3}$$

Q2 - Appliquer le principe fondamental de la dynamique et indiquer quelle est l'équation qui permet de déterminer le couple moteur $C_{23}(t)$ en fonction des paramètres du système.

- **P.F.D.** Théorème du moment dynamique projeté sur $(B,\ \vec{x})$: $C_{23}(t) = \overrightarrow{\delta_{B,\,3\cup 4/0}}\cdot\vec{x}$

Q3 - Calculer le moment cinétique en B de $3/0$: $\overrightarrow{\sigma_{B,3/0}}$

B étant un point fixe du repère Galiléen, la relation de calcul du moment cinétique s'écrit :

$$\overrightarrow{\sigma_{B,3/0}} = \overline{\overline{I_B(S_3)}}\cdot\overrightarrow{\Omega_{3/0}} + \overrightarrow{BG}\wedge m\cdot\cancel{\overrightarrow{V_{B,3/0}}} = \begin{pmatrix} I_3 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{pmatrix}_{B_3}\cdot\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_3} = I_3\cdot\dot{\alpha}\cdot\vec{x}$$

Q4 - Calculer le moment cinétique en B de $4/0$: $\overrightarrow{\sigma_{B,4/0}}$

G_4 étant le c.d.g. du solide 4, là encore le terme complémentaire de la relation est nul.

$$\overrightarrow{\sigma_{G_4,4/0}} = \overline{\overline{I_{G_4}(S_4)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{4/0}} = \begin{pmatrix} I_4 & 0 & 0 \\ 0 & J4 & 0 \\ 0 & 0 & K_4 \end{pmatrix}_{B_4} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_4} = I_4 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}$$

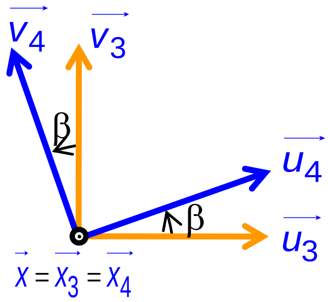
Relation de transport des moments : $\overrightarrow{\sigma_{B,4/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G_4,4/0}} + \overrightarrow{BG_4} \wedge m_4 \cdot \overrightarrow{V_{G_4,4/0}}$

Avec $\overrightarrow{V_{G_4\in 4/0}} = \cancel{\overrightarrow{V_{B\in 4/0}}} + \overrightarrow{G_4B} \wedge \overrightarrow{\Omega_{4/0}} = [-L \cdot \vec{u}_4 - 2l \cdot \vec{u}_3] \wedge \dot{\alpha} \cdot \vec{x} = L\dot{\alpha} \cdot \vec{v}_4 + 2l\dot{\alpha} \cdot \vec{v}_3$

$$\overrightarrow{\sigma_{B,4/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G_4,4/0}} + [\,2l \cdot \vec{u}_3 + L \cdot \vec{u}_4\,] \wedge m_4 \cdot \dot{\alpha} \cdot [\,2l \cdot \vec{v}_3 + L \cdot \vec{v}_4\,]$$

$$\overrightarrow{\sigma_{B,4/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G_4,4/0}} + m_4 \cdot \dot{\alpha} \cdot \left[4l^2\vec{x} + L^2\vec{x} + 2l \cdot L \cdot (\underbrace{\vec{u}_4 \wedge \vec{v}_3}_{\cos\beta \cdot \vec{x}} + \underbrace{\vec{u}_3 \wedge \vec{v}_4}_{\cos\beta \cdot \vec{x}}) \right]$$

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_{B,4/0}} = I_4 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x} + m_4 \cdot \dot{\alpha} \cdot (4l^2 + L^2 + 4l \cdot L \cdot \cos\beta) \cdot \vec{x}}$$



Q5 - Calculer le moment dynamique en B de $3 \cup 4/0$ $\overrightarrow{\delta_{B,3\cup 4/0}}$

$\overrightarrow{\delta_{B,3\cup 4/0}} = \overrightarrow{\delta_{B,3/0}} + \overrightarrow{\delta_{B,4/0}}$ avec :

$$\overrightarrow{\delta_{B,3/0}} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{B,3/0}}}{dt}\right|_{B_0} + m_3 \cdot \underbrace{\cancel{\overrightarrow{V_{B,3/0}}}}_{Car\ B\ est\ fixe\ /\ R_{galiléen}} \wedge \overrightarrow{V_{G_3,3/0}} = I_3 \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{x}$$

$$\overrightarrow{\delta_{B,4/0}} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{B,4/0}}}{dt}\right|_{B_0} + m_4 \cdot \underbrace{\cancel{\overrightarrow{V_{B,3/0}}}}_{Car\ B\ est\ fixe\ /\ R_{galiléen}} \wedge \overrightarrow{V_{G_4,4/0}} = \left[I_4 + m_4 \cdot (4l^2 + L^2 + 4l \cdot L \cdot \cos\beta) \right] \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{x}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_{B,3\cup 4/0}} = \left[I_3 + I_4 + m_4 \cdot (4l^2 + L^2 + 4l \cdot L \cdot \cos\beta) \right] \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{x}}$$

Q6 - Montrer alors que: $C_{23}(t) = \left[I_3 + I_4 + m_4(4 \cdot l^2 + L^2 + 4 \cdot l \cdot L \cdot \cos\beta) \right] \cdot \ddot{\alpha}$

D'où $\boxed{C_{23}(t) = \overrightarrow{\delta_{B,3\cup 4/0}} \cdot \vec{x} = \left[I_3 + I_4 + m_4 \cdot (4l^2 + L^2 + 4l \cdot L \cdot \cos\beta) \right] \cdot \ddot{\alpha}}$

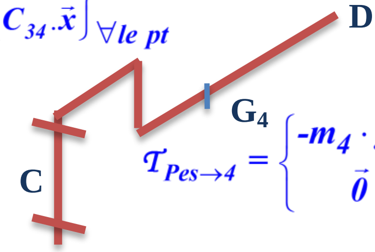
Remarque : Puisque $\beta = cste$, les solides 3 et 4 constituent un unique solide , on peut donc déterminer la matrice de $3 \cup 4$ au point B. On vérifiera en utilisant Huygens que le résultat obtenu pour $C_{23}(t)$ est le même.

DEUXIEME ETUDE:

Q7 - Isoler le bras 4 et dresser le bilan des actions mécaniques extérieures.

- **On isole S_1.**
- **B.A.M.E.**

$$\mathcal{T}_{Moteur\to 4} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{34}.\vec{x} \end{Bmatrix}_{\forall le\ pt}$$



$$\mathcal{T}_{3\to 4} = \begin{Bmatrix} X_{3\to 4} & 0 \\ Y_{3\to 4} & M_{C,3\to 4} \\ Z_{3\to 4} & N_{C,3\to 4} \end{Bmatrix}_{C,Base\ au\ choix} \qquad \mathcal{T}_{Pes\to 4} = \begin{Bmatrix} -m_4 \cdot g \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_4}$$

Q8 - Appliquer le principe fondamental de la dynamique et indiquer quelle est l'équation qui permet de déterminer le couple résistant $C_{24}(t)$ en fonction des paramètres du système.

P.F.D. Théorème du moment dynamique projeté sur $(C,\ \vec{x})$: $\quad C_{34}(t) = \overrightarrow{\delta_{C,4/0}} \cdot \vec{x}$

Q9 - Calculer le moment dynamique en C de $4/0$: $\overrightarrow{\delta_{C,4/0}}$

On rappelle le moment cinétique en G_4 $\quad \overrightarrow{\sigma_{G_4,4/0}} = I_4 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}$

Calcul du moment dynamique G_4

$$\overrightarrow{\delta_{G_4,4/0}} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{G_4,4/0}}}{dt}\right|_{B_0} = I_4 \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{x}$$

Transport de moment : $\quad \overrightarrow{\delta_{C,4/0}} = \overrightarrow{\delta_{G_4,4/0}} + \overrightarrow{CG_4} \wedge m_4 \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G_4,4/0}} =$

Avec $\overrightarrow{\Gamma_{G_4\in 4/0}} = \; = \left.\dfrac{d\overrightarrow{V_{G_4\in 4/0}}}{dt}\right|_{B_0} = \; = \left.\dfrac{d\left[2l\dot{\alpha}\cdot\vec{v}_3 + L\dot{\alpha}\cdot\vec{v}_4\right]}{dt}\right|_{B_0}$

$$= 2l\ddot{\alpha}\cdot\vec{v}_3 + L\ddot{\alpha}\cdot\vec{v}_4 + 2l\dot{\alpha}\cdot\left.\frac{d\,\vec{v}_3}{dt}\right|_{B_0} + L\dot{\alpha}\cdot\left.\frac{d\,\vec{v}_4}{dt}\right|_{B_0}$$

Avec $\left.\dfrac{d\,\vec{v}_3}{dt}\right|_{B_0} = \dot{\alpha}\cdot\vec{x}\wedge\vec{v}_3 = -\dot{\alpha}\cdot\vec{u}_3$ et $\left.\dfrac{d\,\vec{v}_4}{dt}\right|_{B_0} = \dot{\alpha}\cdot\vec{x}\wedge\vec{v}_4 = -\dot{\alpha}\cdot\vec{u}_4$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Gamma_{G_4\in 4/0}} = 2l\ddot{\alpha}\cdot\vec{v}_3 + L\ddot{\alpha}\cdot\vec{v}_4 - 2l\dot{\alpha}^2\,\vec{u}_3 - L\dot{\alpha}^2\,\vec{u}_4$$

Homogénéité

On remplace dans l'expression du moment dynamique :

$$\overrightarrow{\delta_{C,4/0}} = I_4\cdot\ddot{\alpha}\cdot\vec{x} + L\cdot\vec{u}_4 \wedge m_4\cdot\left[2l\ddot{\alpha}\cdot\vec{v}_3 + L\ddot{\alpha}\cdot\vec{v}_4 - 2l\dot{\alpha}^2\,\vec{u}_3 - \cancel{L\dot{\alpha}^2\,\vec{u}_4}\right]$$

$$\overrightarrow{\delta_{C,4/0}} = I_4\cdot\ddot{\alpha}\cdot\vec{x} + m_4\cdot\left[2\,l\,L\cdot\ddot{\alpha}\cdot(\underbrace{\vec{u}_4\wedge\vec{v}_3}_{cos\beta\cdot\vec{x}}) + L^2\ddot{\alpha}\cdot\vec{x} - 2\,l\,L\cdot\dot{\alpha}^2\cdot(\underbrace{\vec{u}_4\wedge\vec{u}_3}_{-sin\beta\cdot\vec{x}})\right]$$

$$\overrightarrow{\delta_{C,4/0}} = I_4\cdot\ddot{\alpha}\cdot\vec{x} + m_4\cdot\left[(2\,l\,L\cdot cos\beta + L^2)\cdot\ddot{\alpha} + 2\,l\,L\cdot sin\beta\;\dot{\alpha}^2\right]\cdot\vec{x}$$

Q10 -Montrer alors que: $C_{34} = \left[I_4 + m_4\cdot L^2 + 2\cdot m_4\cdot l\cdot L\,cos\beta\right]\cdot\ddot{\alpha} + \left[2\cdot m_4\cdot l\cdot L\,sin\beta\right]\cdot\dot{\alpha}^2$

$$\boxed{C_{34}(t) = \overrightarrow{\delta_{C,4/0}}\cdot\vec{x} = I_4\cdot\ddot{\alpha} + m_4\cdot\left[(2\,l\,L\cdot cos\beta + L^2)\cdot\ddot{\alpha} + 2\,l\,L\cdot sin\beta\;\dot{\alpha}^2\right]}$$

Homogénéité

BILAN DES RESULTATS:

- Première configuration :
  On fixe $\beta=0$, Calculer C_{34} et vérifier les résultats logiciels : Courbe 1.
  D'après la relation : $C_{23}(t) = \left[I_3 + I_4 + m_4(4\cdot l^2 + L^2 + 4\cdot l\cdot L\cdot cos\beta)\right]\cdot\ddot{\alpha}$

$$\ddot{\alpha} = \frac{C_{23}(t)}{\left[I_3 + I_4 + m_4(4\cdot l^2 + L^2 + 4\cdot l\cdot L\cdot cos\beta)\right]} =$$

$$= \frac{5}{\left[0,8 + 1 + 20(4\times 0,25^2 + 0,33^2 + 4\times 0,25\times 0,33)\right]} = 0,31\,rad\cdot s^{-2}$$

$$C_{34} = \left[1 + 2\times 20\times 0,25\times 0,33 + 20\times 0,33^2\right]\times 0,32 = 2,07N\cdot m$$

Valeur validée constante sur la courbe (1) à 2,1 N.m

- Deuxième configuration : On choisit $\beta=\pi/2$. Déterminer $\ddot{\alpha}$.

$$\ddot{\alpha} = \frac{5}{\left[0,8 + 1 + 20(4\times 0,25^2 + 0,33^2)\right]} = 0,56\,rad\cdot s^{-2}$$

A t=0, calculer $C_{34}(0)$, $\dot{\alpha} = 0$

$$C_{34} = \left[I_4 + \cancel{2\cdot m_4\cdot l\cdot L\,cos\beta} + m_4\cdot L^2\right]\cdot\ddot{\alpha} + \cancel{\left[2\cdot m_4\cdot l\cdot L\,sin\beta\right]}\cdot\underbrace{\dot{\alpha}^2}_{nulle}$$

$$C_{34} = \left[1 + 20\times 0,33^2\right]\times 0,56 \Rightarrow \boxed{C_{34} = 1,77N\times m}$$

A t=3s, calculer $\dot{\alpha}$ puis déterminer $C_{34}(3)$.

$\ddot{\alpha}$ est constant $= 0,56\,rad\cdot s^{-2}$ **donc** $\dot{\alpha} = \ddot{\alpha}\cdot t = 0,56\times 3 = 1,68rad\cdot s^{-1}$

$$C_{34} = \left[I_4 + \cancel{2\cdot m_4\cdot l\cdot L\,cos\beta} + m_4\cdot L^2\right]\cdot\ddot{\alpha} + \left[2\cdot m_4\cdot l\cdot L\,sin\beta\right]\cdot\dot{\alpha}^2$$

$$C_{34} = \left[1 + 20\times 0,33^2\right]\times 0,56 + \left[2\times 20\times 0,25\times 0,33\right]\times 1,68^2 \Rightarrow \boxed{C_{34} = 11,1\,N\cdot m}$$

Comparer avec les résultats logiciels : Courbe 2.
A $t = 0$ on lit sur la courbe (2) $C_{34} = 1,77\,N\cdot m$ et **à** $t = 3s$ on lit $11,1\,N\cdot m$.
Les résultats calculés et simulés correspondent bien.