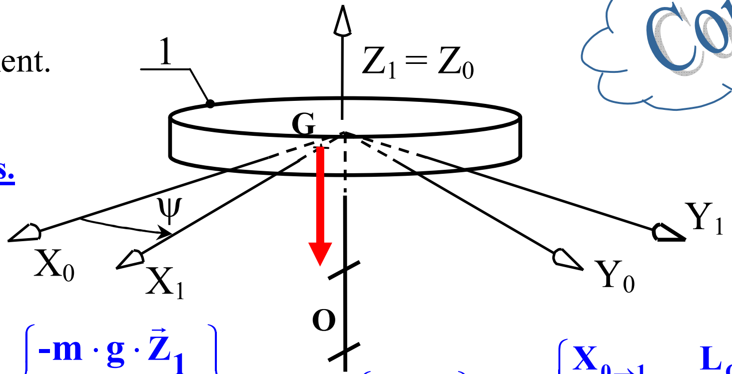
EXERCICE 11– EQUILIBRAGE STATIQUE ET DYNAMIQUE.

Corrigé

1 – Déterminer la loi de mouvement.

➤ **On isole S_1.**

➤ **Bilan des actions mécaniques. (B.A.M.E.)**



$$\left\{Pes.\rightarrow 1\right\} = {}_{G}\left\{\begin{matrix} -m\cdot g\cdot \vec{Z}_1 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\underset{Pivot}{0\rightarrow 1}\right\} = {}_{O}\left\{\begin{matrix} X_{0\rightarrow1} & L_{O,0\rightarrow1} \\ Y_{0\rightarrow1} & M_{O,0\rightarrow1} \\ Z_{0\rightarrow1} & 0 \end{matrix}\right\}_{B_1}$$

On observe qu'il n'y a pas d'inconnues d'efforts de liaison pour le moment sur l'axe $(O,\vec{Z}_0)$

On appliquera donc le théorème du moment dynamique en projection sur l'axe $(O,\vec{Z}_0)$.

☞Action de la pesanteur :

$$\overrightarrow{M_{O\ Pes\rightarrow1}}\cdot\vec{Z}_1 = \left(\overrightarrow{OG}\wedge -m\cdot g\cdot\vec{Z}_0\right)\cdot\vec{Z}_1 = \left(a\cdot\vec{X}_1 + b\cdot\vec{Z}_1\right)\cdot\left(\cancel{-m\cdot g\cdot\vec{Z}_1\wedge\vec{Z}_1}\right) = 0$$

Ci-dessus, la propriété du produit mixte : $\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$

Pour « faire plus court », on peut aussi écrire : Le poids étant parallèle à l'axe $(O,\vec{Z}_0)$, son moment en projection sur l'axe $(O,\vec{Z}_0)$ est nul.

☞ L'action dans la liaison pivot : $\overrightarrow{M_{O\ \underset{Pivot}{0\rightarrow1}}}\cdot\vec{Z}_1 = 0$

☞ Calcul du moment dynamique : $\overrightarrow{\delta_{O,1/0}}$ projeté sur $(O,\vec{Z}_0)$

$$\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}} = \overline{\overline{I}}(O,S_1)\cdot\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{B_1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E\cdot\dot{\psi} \\ -D\cdot\dot{\psi} \\ C\cdot\dot{\psi} \end{pmatrix}_{B_1}$$

$$\overrightarrow{\delta_{O,1/0}}\cdot\vec{Z}_1 = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}}}{dt}\right|_{B_0}\cdot\vec{Z}_1 = \left.\frac{d\left[-E\cdot\dot{\psi}\cdot\vec{X}_1 - D\cdot\dot{\psi}\cdot\vec{Y}_1 + C\cdot\dot{\psi}\cdot\vec{Z}_1\right]}{dt}\right|_{B_0}\cdot\vec{Z}_1$$

$$= \left(\cancel{\cdots\vec{Y}_1} + \cancel{\cdots\vec{X}_1} + C\cdot\ddot{\psi}\cdot\vec{Z}_1\right)\cdot\vec{Z}_1 = C\cdot\ddot{\psi} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{\delta_{O,1/0}}\cdot\vec{Z}_1 = C\cdot\ddot{\psi}(t)$$

Pour « faire plus court », on peut aussi écrire : Le moment dynamique d'un solide animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe $(O,\vec{Z}_1)$ avec un taux de rotation* noté $\dot{\psi}(t)$, et dont le moment d'inertie par rapport à cet axe est C, vaut $\overrightarrow{\delta_{O,1/0}}\cdot\vec{Z}_1 = C\cdot\ddot{\psi}(t)$

**Taux de rotation signifie vitesse de rotation (en rad.s^{-1})*

➤ **P.F.D.** : $\overrightarrow{M_{O\ \overline{1}\rightarrow1}}\cdot\vec{Z}_1 = \overrightarrow{\delta_{O,1/0}}\cdot\vec{Z}_1$

$\cancel{\overrightarrow{M_{O\ Pes\rightarrow1}}\cdot\vec{Z}_1}\cdot\cancel{\overrightarrow{M_{O\ \underset{Pivot}{0\rightarrow1}}}\cdot\vec{Z}_1} = C.\ddot{\psi} = 0$. La loi de mouvement s'écrit donc : $\ddot{\psi}(t) = 0$

➢ **Résultat :** En intégrant et en tenant compte des conditions initiales :

$\dot{\psi}(t) = cste$ avec, à $t = 0$: $\dot{\psi}(0) = \omega$

$\psi(t) = \omega \cdot t + \psi(0)$ avec, à $t = 0$: $\psi(0) = 0$ d'où : $\boxed{\psi(t) = \omega \cdot t}$

Rmq : On a négligé les frottements, on aboutit donc à un mouvement perpétuel à vitesse ω constante.

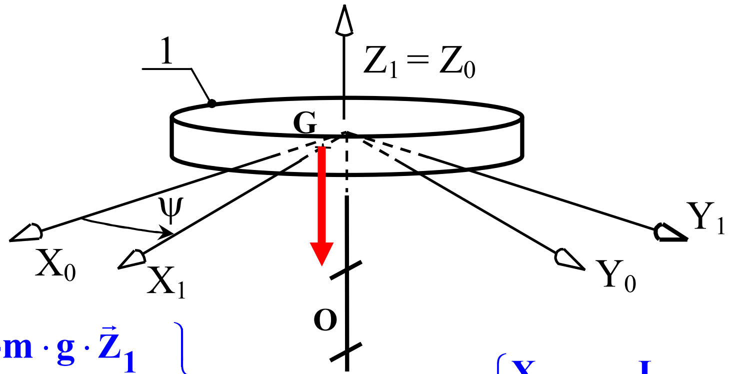
2 - Déterminer le torseur des actions dans la liaison pivot.

Cette fois-ci, il faut écrire les six équations du PFD. (Cinq si on exclut l'équation de mouvement déjà étudiée). On retient que $\ddot{\psi}(t) = 0$

$$\overrightarrow{M_{O\ Pes \to 1}} = \left(\overrightarrow{OG} \wedge -m \cdot g \cdot \vec{Z}_0\right) = \left(a \cdot \vec{X}_1 + b \cdot \vec{Z}_1\right) \wedge -m \cdot g \cdot \vec{Z}_1 = -a \cdot m \cdot g \cdot \left(\vec{X}_1 \wedge \vec{Z}_1\right) = a \cdot m \cdot g \cdot \vec{Y}_1$$

➢ **On isole S_1.**

➢ **Le bilan s'écrit donc** :



$$\mathcal{T}_{Pes. \to 1} = {}_O\begin{Bmatrix} -m \cdot g \cdot \vec{Z}_1 \\ a \cdot m \cdot g \cdot \vec{Y}_1 \end{Bmatrix}$$

$$\underset{Pivot}{\mathcal{T}_{0 \to 1}} = {}_O\begin{Bmatrix} X_{0 \to 1} & L_{O,0 \to 1} \\ Y_{0 \to 1} & M_{O,0 \to 1} \\ Z_{0 \to 1} & 0 \end{Bmatrix}_{B_1}$$

➢ **P.F.D.**

Détermination du torseur cinétique :

☞ Calcul de la résultante cinétique : $\overrightarrow{R_c 1/0} = \overrightarrow{m \cdot V(G \in 1/0)}$

$$\overrightarrow{V(G \in 1/0)} = \overrightarrow{V(O \in 1/0)} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega 1/0}$$

$$= -\left(a \cdot \vec{X}_1 + \cancel{b \cdot \vec{Z}_1}\right) \wedge \dot{\psi}.\vec{Z}_1 = -a \cdot \dot{\psi} \cdot \left(\vec{X}_1 \wedge .\vec{Z}_1\right) \quad \Rightarrow \overrightarrow{R_c 1/0} = m \cdot a \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{Y}_1$$

☞ Calcul du moment cinétique : $\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}}$

$$\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}} = \bar{\bar{\mathbb{I}}}(O,S_1) \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}} + \overrightarrow{OG} \wedge m\overrightarrow{V(O \in 1/0)} \text{ avec O, un point fixe.} \Rightarrow \overrightarrow{\sigma_{O,1/0}} = \bar{\bar{\mathbb{I}}}(O,S) \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\sigma_{O,1/0}} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{B_1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} -E \cdot \dot{\psi} \\ -D \cdot \dot{\psi} \\ C \cdot \dot{\psi} \end{pmatrix}_{B_1} \quad \text{D'où} \quad \boxed{\left\{\mathcal{C}_{1/0}\right\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & -E \cdot \dot{\psi} \\ m \cdot a \cdot \dot{\psi} & -D \cdot \dot{\psi} \\ 0 & C \cdot \dot{\psi} \end{Bmatrix}_{B_1}}$$

Homogénéité

Détermination du torseur dynamique :

☞ Calcul de la résultante dynamique : $\overrightarrow{R_d 1/0} = m \cdot \overrightarrow{\Gamma(G \in 1/0)}$

$$\overrightarrow{\Gamma(G \in 1/0)} = \left.\frac{d\overrightarrow{V(G \in 1/0)}}{dt}\right|_{B_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{V(G \in 1/0)}}{dt}\right|_{B_1} + \overrightarrow{\Omega\ 1/0} \wedge \overrightarrow{V(G \in 1/0)}$$

$$= \cancel{a \cdot \ddot{\psi} \cdot \vec{Y}_1} + \dot{\psi}.\vec{Z}_1 \wedge a \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{Y}_1 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\Gamma(G \in 1/0)} = \cancel{a \cdot \ddot{\psi} \cdot \vec{Y}_1} - a \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \vec{X}_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{R_{d\,1/0}} = \cancel{m\cdot a\cdot\ddot{\psi}\cdot\vec{Y}_1} - m\cdot a\cdot\dot{\psi}^2\cdot\vec{X}_1}$$

☞ Calcul du moment dynamique :

$$\overrightarrow{\delta_{O,1/0}} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}}}{dt}\right|_{B_0}$$ car O est un point fixe.

$$\overrightarrow{\delta_{O,1/0}} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}}}{dt}\right|_{B_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}} = \begin{pmatrix} \cancel{-E\cdot\ddot{\psi}} \\ \cancel{-D\cdot\ddot{\psi}} \\ \cancel{C\cdot\ddot{\psi}} \end{pmatrix}_{B_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} -E\cdot\dot{\psi} \\ -D\cdot\dot{\psi} \\ C\cdot\dot{\psi} \end{pmatrix}_{B_1} = \boxed{\begin{pmatrix} \cancel{-E\cdot\ddot{\psi}} + D\cdot\dot{\psi}^2 \\ \cancel{-D\cdot\ddot{\psi}} - E\cdot\dot{\psi}^2 \\ \cancel{C\cdot\ddot{\psi}} \end{pmatrix}_{B_1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\{\mathcal{D}_{1/0}\right\} = {}_{O}\left\{\begin{matrix} -\ m\cdot a\cdot\dot{\psi}^2 & D\cdot\dot{\psi}^2 \\ 0 & -E\cdot\dot{\psi}^2 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{B_1}}$$

Homogénéité

Théorème de la résultante dynamique : $\overrightarrow{R_{\bar{1}\to 1}} = \overrightarrow{R_{d\,1/0}}$

(1) $X_{0\to1} = -\ m\cdot a\cdot\dot{\psi}^2$

(2) $Y_{0\to1} = 0$

(3) $Z_{0\to1} - m\cdot g = 0$

← *5 équations permettant de déterminer les efforts de liaisons.*

Théorème du moment dynamique : $\overrightarrow{M_{O\ \bar{1}\to 1}} = \overrightarrow{\delta_{O,1/0}}$

(4) $L_{0\to1} = D\cdot\dot{\psi}^2$

(5) $M_{0\to1} + a\cdot m\cdot g = -E\cdot\dot{\psi}^2$

(6) $0 = 0$ $\quad\left(0 = C\cdot\ddot{\psi}\ \textit{ Rappel de l'équation de mouvement.}\right)$

➤ **<u>Résultats</u>** On en déduit les actions transmises par la liaison pivot.

$$\boxed{\underset{Pivot}{\mathcal{T}_{0\to1}} = {}_{O}\left\{\begin{matrix} -\ m\cdot a\cdot\dot{\psi}^2 & D\cdot\dot{\psi}^2 \\ 0 & -E\cdot\dot{\psi}^2 - a\cdot m\cdot g \\ m\cdot g & 0 \end{matrix}\right\}_{B_1}}$$

Homogénéité

<u>Définitions :</u>

*Il y a équilibrage **statique** si la **résultante** des actions transmises par la liaison, exprimée dans le repère R_0, **est indépendante du temps**.*

*Il y a équilibrage **dynamique** si **le moment** des actions transmises par la liaison, exprimé dans le repère R_0, **est indépendant du temps**.*

<u>Remarque</u> : Les composantes de l'action dans la liaison pivot sont exprimées dans B_1. Si on exprime le torseur dans B_0, on voit que les composantes sur $\vec{X}_0$ et sur $\vec{Y}_0$ de la résultante et du moment en O seront variables. **<u>Pour les rendre constantes il faut les annuler</u>**.

3 – Equilibrage à une masse :

On place une masse ponctuelle M_A au point A de coordonnées (x_A, y_A, z_A) dans B_1.

- Déterminer les valeurs de M_A, x_A, y_A et z_A afin de réaliser l'équilibrage statique.
- Déterminer la valeur des produits D_E, E_E, F_E pour l'ensemble « rotor ∪ masse M_A ».
- Montrer qu'il n'est pas possible de réaliser l'équilibrage dynamique dans tous les cas.

On ajoute une masse $\mathbf{M_A}$ en liaison fixe par rapport au solide $\mathbf{S_1}$

$$\overrightarrow{\mathbf{V}(A\in M_A/0)} = \overrightarrow{\mathbf{V}(A\in 1/0)} = \cancel{\overrightarrow{\mathbf{V}(O\in 1/0)}} + \overrightarrow{\mathbf{AO}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{\Omega 1/0}} = \begin{pmatrix} -x_A \\ -y_A \\ -z_A \end{pmatrix}_{B_1} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\psi \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} -y_A\cdot\dot\psi \\ x_A\cdot\dot\psi \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1}$$

$$\overrightarrow{\Gamma(A\in 1/0)} = \left.\frac{d\overrightarrow{V(A\in 1/0)}}{dt}\right|_{B_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{V(A\in 1/0)}}{dt}\right|_{B_1} + \overrightarrow{\Omega 1/0}\wedge\overrightarrow{V(A\in 1/0)}$$

$$= \begin{pmatrix} -y_A\cdot\ddot\psi \\ x_A\cdot\ddot\psi \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\psi \end{pmatrix}_{B_1} \wedge \begin{pmatrix} -y_A\cdot\dot\psi \\ x_A\cdot\dot\psi \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} -y_A\cdot\ddot\psi - x_A\cdot\dot\psi^2 \\ x_A\cdot\ddot\psi - y_A\cdot\dot\psi^2 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\mathbf{R_d M_A/0}} = \mathbf{M_A}\cdot\begin{pmatrix} -y_A\cdot\ddot\psi - x_A\cdot\dot\psi^2 \\ x_A\cdot\ddot\psi - y_A\cdot\dot\psi^2 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1}$$

L'équation de mouvement devenant : $\mathbf{0} = \mathbf{C'}\cdot\ddot\psi$, on a toujours $\ddot\psi = \mathbf{0}$

Le théorème de la résultante dynamique devient : $\overrightarrow{\mathbf{R}_{\overline{1\cup M_A}\to 1\cup M_A}} = \overrightarrow{\mathbf{R}_{d\,1\cup M_A \to 1\cup M_A/0}}$

(1') $\qquad \mathbf{X_{0\to1}} = -\,\mathbf{m\cdot a\cdot\dot\psi^2} - \mathbf{M_A\cdot x_A\cdot\dot\psi^2}$

(2') $\qquad \mathbf{Y_{0\to1}} = -\,\mathbf{M_A\cdot y_A\cdot\dot\psi^2}$

(3') $\qquad \mathbf{Z_{0\to1}} - (\mathbf{m} + \mathbf{M_A})\cdot\mathbf{g} = \mathbf{0}$

On a vu que les composantes $\mathbf{X_{0\to1}}$ et $\mathbf{Y_{0\to1}}$ devaient être annulées.

Ceci revient à placer le centre de gravité de l'ensemble sur l'axe de rotation.

Soit $\mathbf{G_E}$ le cdg de l'ensemble tel que $\overrightarrow{\mathbf{OG_E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_E \end{pmatrix}_{B_1}$

$$\sum m_i\cdot\overrightarrow{G_EG_i} = \overline{0} \Rightarrow m\cdot\overrightarrow{G_EG} + M_A\cdot\overrightarrow{G_EA} = \overline{0}$$

En projection : *(a)* $\quad \mathbf{m\cdot a + M_A\cdot x_A = 0}$

(b) $\quad \mathbf{M_A\cdot y_A = 0}$

$$\boxed{\Rightarrow \mathbf{y_A = 0} \text{ et } \mathbf{x_A = \frac{-m\cdot a}{M_A}}}$$

Rmq : Le poids de l'ensemble étant appliqué en G_E sur l'axe de rotation, le terme $\mathbf{-a\cdot m\cdot g\cdot\vec Y_1}$ résultant du calcul du moment en O du poids du solide 1 est compensé.

En plaçant la masse $\mathbf{M_A}$, on modifie les produits d'inertie de l'ensemble E .

Le théorème du moment dynamique devient : $\overrightarrow{\mathbf{M_{O\,\overline{1\cup M_A}\to 1\cup M_A}}} = \overrightarrow{\delta_{O,1\cup M_A/0}}$

$$(4) \qquad \mathbf{L_{0\to 1}} = \mathbf{D_E}\cdot\dot{\psi}^2$$

$$(5) \qquad \mathbf{M_{0\to 1}} = \mathbf{-E_E}\cdot\dot{\psi}^2$$

Avec :

$$(c) \quad \mathbf{D_E = D + M_A \cdot y_A \cdot z_A}$$

$$(d) \quad \mathbf{E_E = E + M_A \cdot z_A \cdot x_A}$$

Là encore, la seule façon d'obtenir des composantes nulles après projection dans $\mathbf{B_0}$ consiste à annuler les produits $\mathbf{D_E}$ et $\mathbf{E_E}$

Or ici, on a $\mathbf{y_A = 0} \Rightarrow \mathbf{D_E \neq 0}$
Il est donc impossible d'assurer l'équilibrage dynamique avec une seule masse.

4 - Equilibrage à deux masses

On place deux masses M_A et M_B aux points A (x_A, y_A, z_A) et B (x_B, y_B, z_B) dans B_1.

- Montrer qu'il est possible de réaliser l'équilibrage statique et dynamique.

L'équation visant à placer le centre de gravité de l'ensemble sur l'axe de rotation devient :

$$\sum \mathbf{m_i}\cdot\overrightarrow{\mathbf{G_E G_i}} = \overline{\mathbf{0}} \Rightarrow \mathbf{m}\cdot\overrightarrow{\mathbf{G_E G}} + \mathbf{M_A}\cdot\overrightarrow{\mathbf{G_E A}} + \mathbf{M_B}\cdot\overrightarrow{\mathbf{G_E B}} = \overline{\mathbf{0}}$$

En projection :

$$(a') \qquad \mathbf{m\cdot a + M_A\cdot x_A + M_B\cdot x_B = 0}$$

$$(b') \qquad \mathbf{M_A\cdot y_A + M_B\cdot y_B = 0}$$

Les produits sont eux aussi modifiés et doivent devenir nuls.

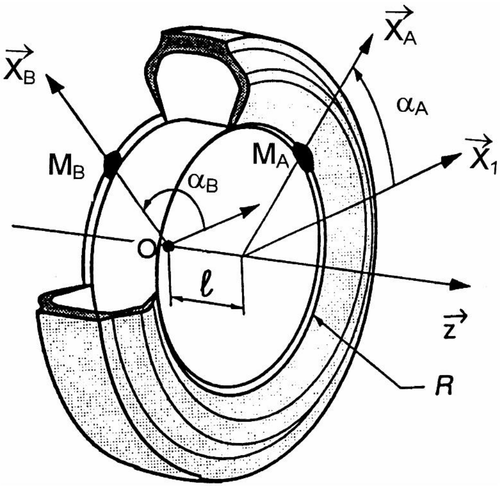
$$(c') \quad \mathbf{D_E = D + M_A\cdot y_A\cdot z_A + M_B\cdot y_B\cdot z_B = 0}$$

$$(d') \quad \mathbf{E_E = E + M_A\cdot z_A\cdot x_A + M_B\cdot z_B\cdot x_B = 0}$$

On aboutit à **4** équations pour **8** inconnues : $\mathbf{M_A}$, $\mathbf{M_B}$, $\mathbf{x_A}$, $\mathbf{y_A}$, $\mathbf{z_A}$, $\mathbf{x_B}$, $\mathbf{y_B}$ et $\mathbf{z_B}$
On pourra donc se donner arbitrairement 4 inconnues et trouver une solution au problème.
Il est donc possible d'assurer l'équilibrage dynamique avec deux masses.

5 – Application à l'équilibrage d'une roue de véhicule.
On place les deux masses sur la jante de la roue de rayon R et de largeur ℓ disposées selon la figure ci-contre :

On pose $z_A = \ell$, $z_B = 0$



- Déterminer les valeurs de M_A, M_B, α_A, α_B afin de réaliser les équilibrages statique et dynamique.

On procède au changement de variables :

$$x_A = R \cdot \cos\alpha_A \;; \qquad y_A = R \cdot \sin\alpha_A \;; \qquad x_B = R \cdot \cos\alpha_B \;; \qquad y_B = R \cdot \sin\alpha_B$$

Il y a maintenant 4 inconnues α_A, α_B, M_A et $\alpha_A, \alpha_B, M_A, M_B$ pour 4 équations.

Le système d'équations devient :

(a') $\quad m \cdot a + M_A \cdot R \cdot \cos\alpha_A + M_B \cdot R \cdot \cos\alpha_B = 0$

(b') $\quad M_A \cdot R \cdot \sin\alpha_A + M_B \cdot R \cdot \sin\alpha_B = 0$

(c') $\quad D_E = D + M_A \cdot R \cdot \sin\alpha_A \cdot \ell = 0$

(d') $\quad E_E = E + M_A \cdot R \cdot \cos\alpha_A \cdot \ell = 0$

(c') $\quad D^2 = (M_A \cdot R \cdot \ell)^2 \cdot \sin^2\alpha_A$

(d') $\quad E^2 = (M_A \cdot R \cdot \ell)^2 \cdot \cos^2\alpha_A$

(c')+(d') $\quad D^2 + E^2 = (M_A \cdot R \cdot \ell)^2$

(c')+(d') $\quad \boxed{M_A = \dfrac{\sqrt{D^2 + E^2}}{R \cdot \ell}}$

(c') $\quad D = -(M_A \cdot R \cdot \ell) \cdot \sin\alpha_A$

(d') $\quad E = -(M_A \cdot R \cdot \ell) \cdot \cos\alpha_A$

(c') /(d') $\quad \dfrac{D}{E} = \tan\alpha_A \Rightarrow \boxed{\alpha_A = \arctan\dfrac{D}{E}}$

(c') $\quad M_A \cdot R \cdot \sin\alpha_A = \dfrac{-D}{\ell}$ $\qquad$ et $\qquad$ *(d')* $\quad M_A \cdot R \cdot \cos\alpha_A = \dfrac{-E}{\ell}$

En remplaçant ces expressions dans *(a')* et *(b')*

(a') $\quad m \cdot a - \dfrac{E}{\ell} + M_B \cdot R \cdot \cos\alpha_B = 0 \Rightarrow M_B \cdot R \cdot \cos\alpha_B = \dfrac{E - m \cdot a \cdot \ell}{\ell}$

(b') $\quad -\dfrac{D}{\ell} + M_B \cdot R \cdot \sin\alpha_B = 0 \Rightarrow M_B \cdot R \cdot \sin\alpha_B = \dfrac{D}{\ell}$

(a') et (b') $\quad (M_B \cdot R)^2 = \dfrac{(E - m \cdot a \cdot \ell)^2 + D^2}{\ell^2} \Rightarrow \boxed{M_B = \dfrac{\sqrt{(E - m \cdot a \cdot \ell)^2 + D^2}}{\ell \cdot R}}$

(b') /(a') $\quad \tan\alpha_B = \dfrac{D}{E - m \cdot a \cdot \ell} \Rightarrow \boxed{\alpha_B = \arctan\dfrac{D}{E - m \cdot a \cdot \ell}}$