EXERCICE 10 : MISE EN EVIDENCE DU COUPLE GYROSCOPIQUE.

Corrigé

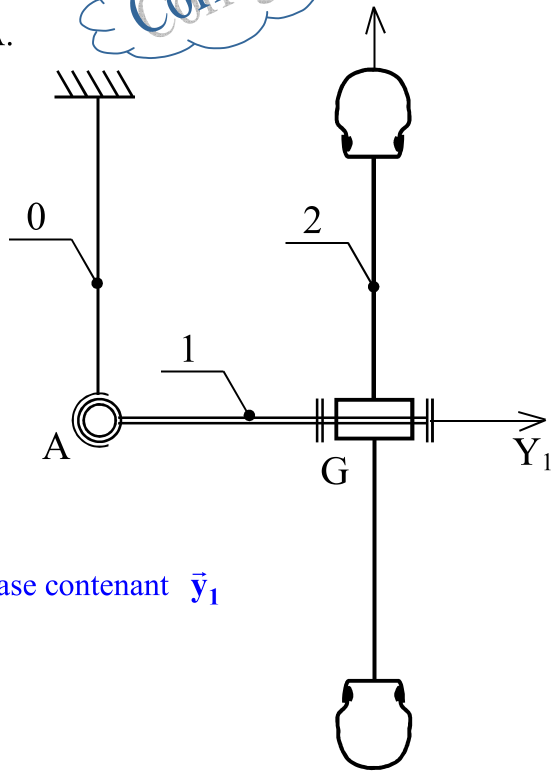
$\varphi = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$

La modélisation retenue est une liaison sphérique de centre A.

Hypothèse : Rotation d'axe $(A, \vec{z}_1)$.

Tel que $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ et $\overrightarrow{AG} = e.\vec{y}_1$

La masse de l'axe *1* est négligée.



➢ **Travail demandé :**

Q1 - Donner la forme de l'opérateur d'inertie $\overline{\overline{I_G(S_2)}}$

Il y a une symétrie de révolution d'axe $(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{y}}_1)$

Donc $\int_{S_1} (x^2 + y^2) \cdot dm = \int_{S_1} (x^2 + y^2) \cdot dm$

Soit $A = C$

Par ailleurs le solide de révolution a ses produits nuls dans toute base contenant $\vec{\mathbf{y}}_1$

$$\Rightarrow \overline{\overline{I_G(S_2)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}_{B_2}$$

La matrice d'un solide de révolution d'axe $(\mathbf{A}, \vec{\mathbf{y}}_1)$ est inchangée par rotation autour de $\vec{\mathbf{y}}_1$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{\overline{I_G(S_2)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}_{B_1}}$$

Remarque, : les dimensions suivant $\vec{\mathbf{y}}_1$ étant négligeables par rapport à celles suivant $\vec{\mathbf{x}}_2$ et $\vec{\mathbf{z}}_2$

$$\Rightarrow A = \int_{S_1} x^2 \cdot dm = C = \int_{S_1} z^2 \cdot dm \quad \Rightarrow B = \int_{S_1} (z^2 + x^2) \cdot dm = A + C$$

Ce qui correspond au cas des plaques (vu en cours)

Q2 - Déterminer le torseur cinématique $\mathcal{V}_{2/0}$ exprimé au point *G*.

$$\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\varphi} \cdot \vec{y}_1 + \dot{\psi} \cdot \vec{z}_1$$

$$\overrightarrow{V_{G\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{G\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} + \overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \qquad \text{avec} \quad \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \vec{0}$$

Car pivot d'axe$(G, \vec{y}_1)$ *Car A centre de la liaison Sphérique*

$$= -e \cdot \vec{y}_1 \wedge (\cancel{\dot{\varphi} \cdot \vec{y}_1} + \dot{\psi} \cdot \vec{z}_1) = -e \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{x}_1) \quad \Rightarrow \boxed{\mathcal{V}_{2/0} = \begin{Bmatrix} \dot{\varphi} \cdot \vec{y}_1 + \dot{\psi} \cdot \vec{z}_1 \\ -e \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{x}_1 \end{Bmatrix}_G}$$

Q3 - Déterminer le torseur cinétique $\mathcal{C}_{2/0}$ au point *G*.

La résultante cinétique s'écrit : $\overrightarrow{R_{c2/0}} = m \cdot \overrightarrow{V_{G\in 2/0}} = -m \cdot e \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{x}_1$

Le moment cinétique s'écrit :

$\overrightarrow{\sigma_{G,2/0}} = \overline{\overline{I_G(S_2)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/0}}$ car G est le c.d.g. du solide S_2

$$\Rightarrow \overrightarrow{\sigma_{G,2/0}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ B \cdot \dot{\varphi} \\ A \cdot \dot{\psi} \end{pmatrix}_{B_1} \qquad \Rightarrow \boxed{\mathcal{C}_{2/0} = \begin{Bmatrix} -m \cdot e \cdot \dot{\psi} & 0 \\ 0 & B \cdot \dot{\varphi} \\ 0 & A \cdot \dot{\psi} \end{Bmatrix}_{B_1}}$$

Q4 - Déterminer le torseur dynamique $\mathcal{D}_{2/0}$ au point *G*.

$$\overrightarrow{\Gamma_{G\in 2/0}} = \left.\frac{d\overrightarrow{V_{G\in 2/0}}}{dt}\right|_{B_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{V_{G\in 2/0}}}{dt}\right|_{B_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in 2/0}} = -e \cdot \ddot{\psi} \cdot \vec{x}_1 + \dot{\psi} \cdot \vec{z}_1 \wedge -e \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{x}_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\Gamma_{G\in 2/0}} = -e \cdot \ddot{\psi} \cdot \vec{x}_1 - e \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \vec{y}_1}$$

$$\overrightarrow{\delta_{G,2/0}} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{G,2/0}}}{dt}\right|_{B_0} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{G,2/0}}}{dt}\right|_{B_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{\sigma_{G,2/0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ B \cdot \ddot{\varphi} \\ A \cdot \ddot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ B \cdot \dot{\varphi} \\ A \cdot \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B \cdot \dot{\psi}\dot{\varphi} \\ B \cdot \ddot{\varphi} \\ A \cdot \ddot{\psi} \end{pmatrix}_{B_1}$$

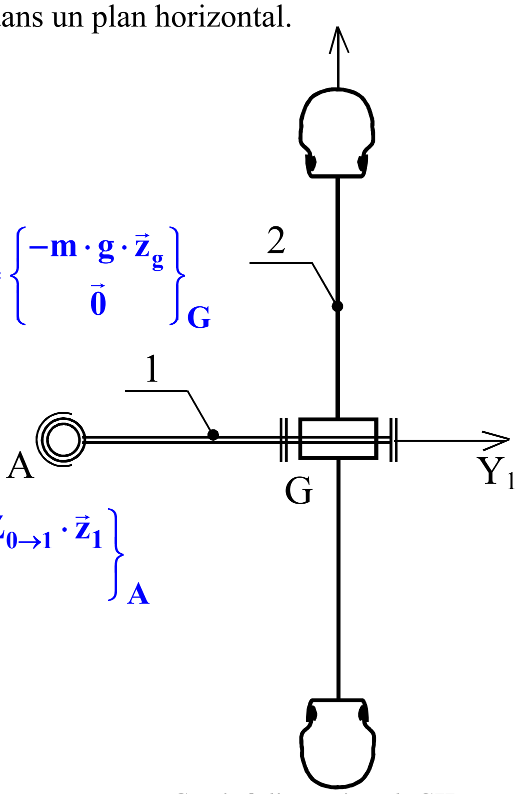
$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{D}_{2/0} = \begin{Bmatrix} -m \cdot e \cdot \ddot{\psi} & -B \cdot \dot{\psi}\dot{\varphi} \\ -m \cdot e \cdot \dot{\psi}^2 & B \cdot \ddot{\varphi} \\ 0 & A \cdot \ddot{\psi} \end{Bmatrix}_{B_1}}$$

Q5 - Appliquer le P.F.D. En déduire les actions dans la liaison rotule et donner l'expression du moment gyroscopique qui permet le maintien de l'axe *1* dans un plan horizontal.

- On isole l'ensemble $\mathbf{1 \cup 2}$

- B.a.m.e.

$$\mathcal{T}_{pes\to 2} = \begin{Bmatrix} -m \cdot g \cdot \vec{z}_g \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$



$$\underset{\substack{\textit{Sphérique} \\ \textit{de centre } A}}{\mathcal{T}_{0\to 1}} = \begin{Bmatrix} X_{0\to 1} \cdot \vec{x}_1 + Y_{0\to 1} \cdot \vec{y}_1 + Z_{0\to 1} \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

➢ Ecriture des moments en G

$$\overrightarrow{\mathbf{M}_{G,0\to1}} = \overrightarrow{\mathbf{GA}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{R}_{0\to1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{-e} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \mathbf{X_{0\to1}} \\ \mathbf{Y_{0\to1}} \\ \mathbf{Z_{0\to1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-e \cdot Z_{0\to1}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{e \cdot X_{0\to1}} \end{pmatrix}_{B_1}$$

Théorème de la résultante dynamique

(1) $\mathbf{X_{0\to1} = -m \cdot e \cdot \ddot{\psi}}$

(2) $\mathbf{Y_{0\to1} = -m \cdot e \cdot \dot{\psi}^2}$

(3) $\mathbf{Z_{0\to1} - m \cdot g = 0}$

Théorème du moment dynamique exprimé en G

(4) $\mathbf{-e \cdot Z_{0\to1} = -B \cdot \dot{\psi}\dot{\varphi}}$

(5) $\mathbf{0 = B \cdot \ddot{\varphi}}$

(6) $\mathbf{e \cdot X_{0\to1} = A \cdot \ddot{\psi}}$

(5) $\Rightarrow \mathbf{\ddot{\varphi} = 0} \Rightarrow \mathbf{\dot{\varphi} = cste}$

(4) $\Rightarrow \mathbf{\dot{\psi} = cste} \Rightarrow \mathbf{\ddot{\psi} = 0}$

(3) $\Rightarrow \mathbf{Z_{0\to1} = m \cdot g = cste}$

(1) **ou** *(6)* $\Rightarrow \mathbf{X_{0\to1} = cste}$

On voit que l'équation *(4)* met en évidence le couple gyroscopique . $\mathbf{-e \cdot Z_{0\to1} + B \cdot \dot{\psi}\dot{\varphi} = 0}$
Pour un observateur lié au repère relatif R1, le couple gyroscopique $\mathbf{B \cdot \dot{\psi}\dot{\varphi}}$ apparaît comme un moment qui compense le moment $\mathbf{e \cdot Z_{0\to1}}$ dû au fil vertical.

On note que si $\dot{\psi} \nearrow$ alors $\dot{\varphi} \searrow$

Q6 - Interprétation : Exploitation du couple gyroscopique par un motard.

Une rotation $\mathbf{\dot{\varphi} > 0}$ qui correspond à l'avance de la moto ;

Une rotation $\mathbf{\dot{\psi} > 0}$ qui correspond à la volonté d'un conducteur néophyte de tourner à gauche ;

Il en résulte un moment $\mathbf{B \cdot \dot{\psi} \cdot \dot{\varphi} > 0}$ qui provoque une rotation de la moto autour de l'axe dans le sens positif. Et permet finalement de prendre un virage vers la droite