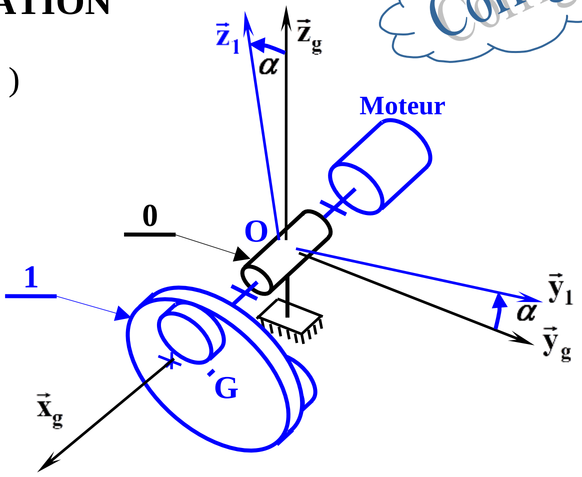
Corrigé

EXERCICE 9 : ARBRE MOTEUR EN ROTATION



Le bâti est solidaire d'un repère galiléen $(O,\ \vec{x}_g,\ \vec{y}_g,\ \vec{z}_g\ )$

Le champ de pesanteur est donné par $\vec{g} = -g \cdot \vec{z}_g$

Un solide 1, de masse M et de centre d'inertie G est lié au bâti par une liaison pivot d'axe $(O,\ \vec{x}_g)$

Il est solidaire du repère .

$\alpha = (\ \vec{y}_g,\ \vec{y}_1\ )$ $\qquad \overrightarrow{OG} = a \cdot \vec{x}_g + b \cdot \vec{y}_1 + c \cdot \vec{z}_1\ )$

$$\mathbb{I}(G,1) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{B_1}$$

Le solide est mis en rotation sous l'action d'un couple moteur : $\{\ \text{Moteur} \rightarrow 1\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ L \cdot \vec{x}_g \end{Bmatrix}$

TRAVAIL DEMANDE :

Q1 - Déterminer le torseur cinétique $\mathcal{C}_{1/0}$ du solide S_1 par rapport au repère R_g exprimé au point G.*

Calcul de la résultante cinétique : $\overrightarrow{R_c 1/0} = m \cdot \overrightarrow{V(G,1/0)}$

$$\overrightarrow{V(G,1/0)} = \overrightarrow{V(O,1/0)} + \overrightarrow{GO} \wedge \overrightarrow{\Omega 1/0}$$

$$= -(a \cdot \vec{x}_G + b \cdot \vec{y}_1 + c \cdot \vec{z}_1) \wedge \dot{\alpha}.\vec{x}_G = \dot{\alpha} \cdot b \cdot \vec{z}_1 - \dot{\alpha} \cdot c \cdot \vec{y}_1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\overrightarrow{R_c 1/0} = m \cdot \dot{\alpha} \cdot (-c \cdot \vec{y}_1 + b \cdot \vec{z}_1)}$$

Homogénéité

Calcul du moment cinétique : $\overrightarrow{\sigma_{G,1/0}}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\sigma_{G,1/0}} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\alpha} \\ -F \cdot \dot{\alpha} \\ -E \cdot \dot{\alpha} \end{pmatrix}_{B_1} \Rightarrow \boxed{\{\mathcal{C}_{1/0}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & A \cdot \dot{\alpha} \\ -m \cdot \dot{\alpha} \cdot c & -F \cdot \dot{\alpha} \\ +m \cdot \dot{\alpha} \cdot b & -E \cdot \dot{\alpha} \end{Bmatrix}_{B_1}}$$

Q2 - Même question en exprimant $\mathcal{C}_{1/0}$ point O.

Transport du torseur au point O

$$\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G,1/0}} + \overrightarrow{OG} \wedge m \cdot \overrightarrow{V(G,1/0)} = \overrightarrow{\sigma_{G,1/0}} + (a \cdot \vec{x}_G + b \cdot \vec{y}_1 + c \cdot \vec{z}_1) \wedge m \cdot \dot{\alpha} \cdot (-c \cdot \vec{y}_1 + b \cdot \vec{z}_1)$$

Ou encore :

$$\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}} = \overrightarrow{\sigma_{G,1/0}} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{B_1} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot \dot{\alpha} \cdot c \\ m \cdot \dot{\alpha} \cdot b \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} A \cdot \dot{\alpha} + m \cdot \dot{\alpha} \cdot (b^2 + c^2) \\ -F \cdot \dot{\alpha} - m \cdot \dot{\alpha} \cdot a \cdot b \\ -E \cdot \dot{\alpha} - m \cdot \dot{\alpha} \cdot c \cdot a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[A + m \cdot (b^2 + c^2)\right] \cdot \dot{\alpha} \\ -\left[F + m \cdot a \cdot b\right] \cdot \dot{\alpha} \\ -\left[E + m \cdot c \cdot a\right] \cdot \dot{\alpha} \end{pmatrix}$$

Q3 - Déterminer l'expression des termes A', F' *et* E' de l'opérateur d'inertie $\overline{\overline{I_O(S_1)}}$ en utilisant le théorème de Huygens. Retrouver le résultat de la question précédente.

$$\overline{\overline{I}}(O,S_1) = \overline{\overline{I}}(G,S_1) + \overline{\overline{I}}(O \leftrightarrow G,S_1) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\cdot(b^2+c^2) & -m\cdot a\cdot b & -m\cdot c\cdot a \\ -m\cdot a\cdot b & m\cdot(c^2+a^2) & -m\cdot b\cdot c \\ -m\cdot c\cdot a & -m\cdot b\cdot c & m\cdot(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

On en déduit que : $\left| \begin{array}{l} A' = A + m\cdot(b^2+c^2) \\ E' = E + m\cdot c\cdot a \\ F' = F + m\cdot a\cdot b \end{array} \right.$

Retrouver le résultat de la question précédente.

$$\Rightarrow \overrightarrow{\sigma_{O,1/0}} = \begin{pmatrix} A' & -F' & -E' \\ -F' & B' & -D' \\ -E' & -D' & C' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}} = \begin{pmatrix} A'\cdot\dot\alpha \\ -F'\cdot\dot\alpha \\ -E'\cdot\dot\alpha \end{pmatrix}}$$ **On retrouve bien le même résultat.**

Q4 - Déterminer le torseur dynamique $\mathcal{D}_{1/0}$ du solide S_1 par rapport au galiléen exprimé au point O en fonction de A', F' *et* E' .*

$$\overrightarrow{\Gamma(G,1/0)} = \left.\frac{d\,\overrightarrow{V(G,1/0)}}{dt}\right|_{B_0} = \left.\frac{d\,\overrightarrow{V(G,1/0)}}{dt}\right|_{B_1} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{V(G,1/0)}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\ddot\alpha\cdot c \\ +\ddot\alpha\cdot b \end{pmatrix}_{B_1} + \begin{pmatrix} \dot\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot\alpha\cdot c \\ +\dot\alpha\cdot b \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\ddot\alpha\cdot c - \dot\alpha^2\cdot b \\ +\ddot\alpha\cdot b - \dot\alpha^2\cdot c \end{pmatrix}_{B_1} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{R_d 1/0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m\cdot(\ddot\alpha\cdot c + \dot\alpha^2\cdot b) \\ +m\cdot(\ddot\alpha\cdot b - \dot\alpha^2\cdot c) \end{pmatrix}_{B_1}}$$

$\overrightarrow{\delta_{O,1/0}} = \dfrac{d\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}}}{dt/B_0}$ **car O est un point fixe.** **Avec** $\overrightarrow{\delta_{O,1/0}} = \dfrac{d\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}}}{dt/B_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{\sigma_{O,1/0}}$

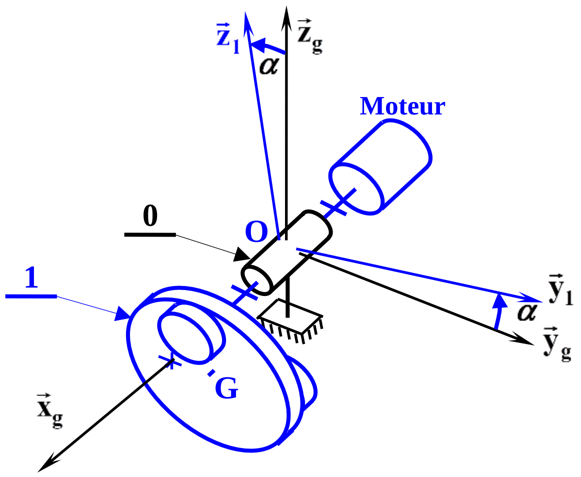
$$\Rightarrow \overrightarrow{\delta_{O,1/0}} = \begin{pmatrix} A'\cdot\ddot\alpha \\ -F'\cdot\ddot\alpha \\ -E'\cdot\ddot\alpha \end{pmatrix}_{B_1} + \begin{pmatrix} \dot\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A'\cdot\dot\alpha \\ -F'\cdot\dot\alpha \\ -E'\cdot\dot\alpha \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} A'\cdot\ddot\alpha \\ -F'\cdot\ddot\alpha + E'\cdot\dot\alpha^2 \\ -E'\cdot\ddot\alpha - F'\cdot\dot\alpha^2 \end{pmatrix}_{B_1} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\delta_{O,1/0}} = \begin{pmatrix} A'\cdot\ddot\alpha \\ -F'\cdot\ddot\alpha + E'\cdot\dot\alpha^2 \\ -E'\cdot\ddot\alpha - F'\cdot\dot\alpha^2 \end{pmatrix}_{B_1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{D}_{1/0} = {}_O\left\{ \begin{array}{cc} 0 & A'\cdot\ddot\alpha \\ -m\cdot(\ddot\alpha\cdot c + \dot\alpha^2\cdot b) & -F'\cdot\ddot\alpha + E'\cdot\dot\alpha^2 \\ m\cdot(\ddot\alpha\cdot b - \dot\alpha^2\cdot c) & -E'\cdot\ddot\alpha - F'\cdot\dot\alpha^2 \end{array} \right\}_{B_1}}$$

Homogénéité

Q5 - Caractériser les torseurs d'actions mécaniques exercées sur le solide S_1.*

- **On isole S_1.**
- **Bilan des actions mécaniques (B.A.M.E.)**



$$\mathcal{T}_{pes\to 1} = \begin{Bmatrix} -m\cdot g\cdot \vec{z}_g \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

$$\mathcal{T}_{0\to 1} = \begin{Bmatrix} X_{0\to 1}\cdot\vec{x}_g + Y_{0\to 1}\cdot\vec{y}_1 + Z_{0\to 1}\cdot\vec{z}_1 \\ M_{0\to 1}\cdot\vec{y}_1 + N_{0\to 1}\cdot\vec{z}_1 \end{Bmatrix}_O$$

$$\mathcal{T}_{moteur\to 1} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ L\cdot\vec{x}_g \end{Bmatrix}_{\forall \text{ le pt}}$$

Q6 - Préciser l'équation scalaire qui permettra le calcul du couple moteur L.

C'est l'équation qui fait apparaître L.

On appliquera donc théorème du moment dynamique en projection sur $\vec{x}_g$: $\overrightarrow{M_{O\,\bar{1}\to 1}}\cdot\vec{x}_g = \overrightarrow{\delta_{O,1/0}}\cdot\vec{x}_g$

Q7 - Appliquer le P.F.D. et en déduire le torseur de l'action mécanique $\mathcal{T}_{0\to 1}$ transmise par la liaison pivot exprimé au point O, ainsi que la valeur du couple moteur.

- **Ecriture du P.F.D. au point O** (car on demande de déterminer les composantes de l'action transmise par la liaison pivot).

$$\overrightarrow{M_O Pes\to 1} = \overrightarrow{OG}\wedge\overrightarrow{R\ Pes\to 1} = (a\cdot\vec{x}_G + b\cdot\vec{y}_1 + c\cdot\vec{z}_1)\wedge -m\cdot g\cdot\vec{z}_G =$$

$$(a\cdot\vec{x}_G + b\cdot\vec{y}_1 + c\cdot\vec{z}_1)\wedge -m\cdot g\cdot\vec{z}_G = a\cdot m\cdot g\cdot\vec{y}_G - (b\cdot m\cdot g\cdot\cos\alpha - c\cdot m\cdot g\cdot\sin\alpha)\cdot\vec{x}_1$$

$$= m\cdot g\left[(-b\cdot\cos\alpha + c\cdot\sin\alpha)\cdot\vec{x}_1 + a\cdot\cos\alpha\cdot\vec{y}_1 - a\cdot\sin\alpha\cdot\vec{z}_1)\right]$$

Autre écriture :

$$\overrightarrow{M_O Pes\to 1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{B_1} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -m\cdot g\cdot\sin\alpha \\ -m\cdot g\cdot\cos\alpha \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} m\cdot g\cdot(-b\cdot\cos\alpha + c\cdot\sin\alpha) \\ a\cdot m\cdot g\cdot\cos\alpha \\ -a\cdot m\cdot g\cdot\sin\alpha \end{pmatrix}_{B_1}$$

Rappel du bilan des am extérieures :

$$\mathcal{T}_{pes\to 1} = \begin{Bmatrix} 0 & m\cdot g\cdot(-b\cdot\cos\alpha + c\cdot\sin\alpha) \\ -m\cdot g\cdot\sin\alpha & a\cdot m\cdot g\cdot\cos\alpha \\ -m\cdot g\cdot\cos\alpha & -a\cdot m\cdot g\cdot\sin\alpha \end{Bmatrix}_{O,B_1}$$

$$\mathcal{T}_{0\to 1} = \begin{Bmatrix} X_{0\to1}\cdot\vec{x}_g + Y_{0\to1}\cdot\vec{y}_1 + Z_{0\to1}\cdot\vec{z}_1 \\ M_{0\to1}\cdot\vec{y}_1 + N_{0\to1}\cdot\vec{z}_1 \end{Bmatrix}_O \qquad \mathcal{T}_{moteur\to 1} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ L\cdot\vec{x}_g \end{Bmatrix}_{\forall \text{ le pt}}$$

- **Théorème de la résultante dynamique :** $\overrightarrow{R_{\bar{1}\to 1}} = \overrightarrow{R_{d\,1/0}}$

$$\begin{array}{lll} (1) & X_{0\to1} & = 0 \\ (2) & Y_{0\to1} - m\cdot g\cdot\sin\alpha & = -m\cdot\ddot{\alpha}\cdot c - m\cdot\dot{\alpha}^2\cdot b \\ (3) & Z_{0\to1} - m\cdot g\cdot\cos\alpha & = m\cdot\ddot{\alpha}\cdot b - m\cdot\dot{\alpha}^2\cdot c \end{array}$$

- **Théorème du moment dynamique :** $\overrightarrow{M_{O\,\bar{1}\to 1}} = \overrightarrow{\delta_{O,1/0}}$

Homogénéité

$$\begin{array}{lll} (4) & L - b\cdot m\cdot g\cdot\cos\alpha + c\cdot m\cdot g\cdot\sin\alpha & = A'\cdot\ddot{\alpha} \\ (5) & M_{0\to1} + a\cdot m\cdot g\cdot\cos\alpha & = -F'\cdot\ddot{\alpha} + E'\cdot\dot{\alpha}^2 \\ (6) & N_{0\to1} - a\cdot m\cdot g\cdot\sin\alpha & = -E'\cdot\ddot{\alpha} - F'\cdot\dot{\alpha}^2 \end{array}$$

$$\boxed{\underset{Pivot}{\mathcal{T}_{0\to 1}} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ m\cdot\left(-\ddot{\alpha}\cdot c - \dot{\alpha}^2\cdot b + g\cdot\sin\alpha\right) & -a\cdot m\cdot g\cdot\cos\alpha - F'\cdot\ddot{\alpha} + E'\cdot\dot{\alpha}^2 \\ m\cdot\left(\ddot{\alpha}\cdot b - \dot{\alpha}^2\cdot c + g\cdot\cos\alpha\right) & a\cdot m\cdot g\cdot\sin\alpha - E'\cdot\ddot{\alpha} - F'\cdot\dot{\alpha}^2 \end{Bmatrix}_{O,B_1}}$$

En déduire la valeur du couple moteur.

On utilise l'équation *(4)*

$$\boxed{L = A'\cdot\ddot{\alpha} + m\cdot g\cdot(b\cdot\cos\alpha - c\cdot\sin\alpha)}$$