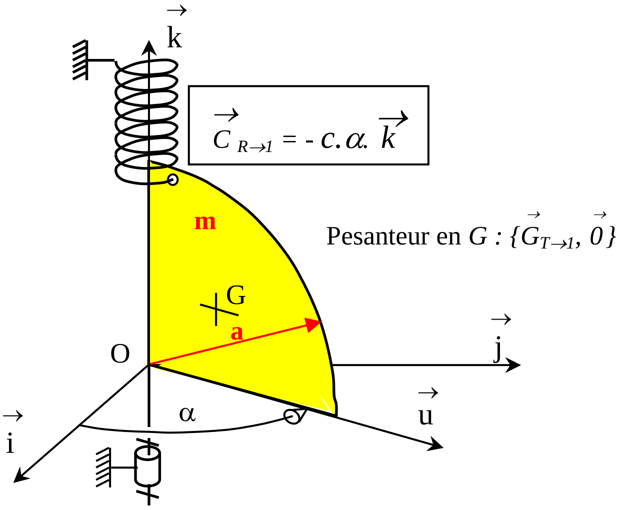
EXERCICE 8 : GIROUETTE CONSTITUEE D'UN QUART DE DISQUE.

$R_1\ (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$.
$R_0\ (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



Q1 Déterminer la matrice d'inertie $\overline{\overline{I_O(S_1)}}$ exprimée dans le repère R_1.

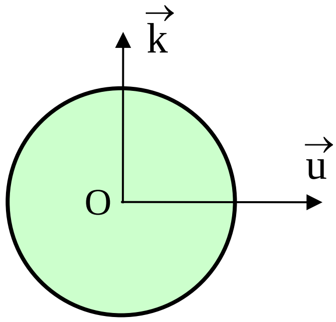
➢ Recherche des moments d'inertie

On écrit la matrice du cylindre entier proposée, en l'adaptant à notre problème :

- au point O ;
- orientée avec l'axe du cylindre suivant $\vec{v}$;
- en faisant $H = 0$ et $R = a$;
- et avec une masse $M = 4 \cdot m$

$$\overline{\overline{I_O Disque\ complet}} = \begin{pmatrix} \frac{4ma^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4ma^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4ma^2}{4} \end{pmatrix}_{\vec{u},\vec{v},\vec{k}}$$

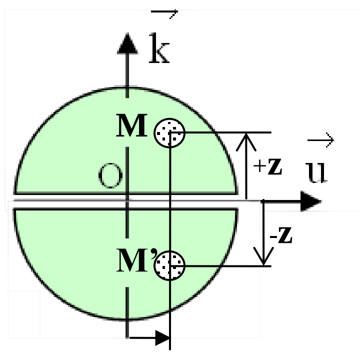
Moment d'inertie d'un disque complet I_{Ov} de masse $M = 4 \cdot m$



$$I_{Ov} = \int_{Disq} \left(z^2 + x^2\right) \cdot dm = \frac{(4 \cdot m) \cdot a^2}{2}$$

et $$I_{Ou} = I_{Ok} = \int_{Disq} \left(x^2 + \cancel{y^2}\right) \cdot dm = \frac{(4 \cdot m) \cdot a^2}{4}$$

Moment d'inertie I_{Ov} d'un demi-disque de masse $2 \cdot m$



En utilisant les propriétés de symétrie, on voit que pour les éléments de surface situés symétriquement en M et en M', z et x sont les mêmes au signe près.

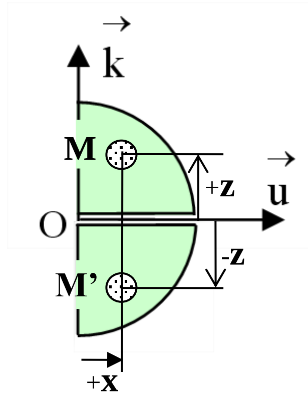
On en déduit que $\left(z^2 + x^2\right) \cdot dm$ est le même pour deux éléments de surface disposés symétriquement.

Ainsi $$\int_{1/2disq} \left(z^2 + x^2\right) \cdot dm = \frac{1}{2} \cdot \int_{Disq} \left(z^2 + x^2\right) \cdot dm$$

$$\Rightarrow I_{Ov} = \int_{1/2disq} \left(z^2 + x^2\right) \cdot dm = \frac{(2 \cdot m) \cdot a^2}{2}$$

Moment d'inertie d'un quart de disque de masse m

Le raisonnement est le même en utilisant les propriétés de symétrie.



$$I_{Ov} = \int_{1/4disq} \left(z^2 + x^2\right) \cdot dm = \frac{m \cdot a^2}{2}$$ Homogénéité

$$\int_{1/4disq} z^2 \cdot dm = \int_{1/4disq} x^2 \cdot dm = = \frac{1}{2} \cdot \int_{1/4disq} \left(z^2 + x^2\right) \cdot dm$$

$$\Rightarrow I_{Ou} = I_{Ok} = \frac{m \cdot a^2}{4} \quad I_{Ou} = I_{Ok} = \frac{m \cdot a^2}{4}$$ Homogénéité

➢ Recherche des produits d'inertie

Le plan $(\vec{k}, O, \vec{u})$ est plan de symétrie.

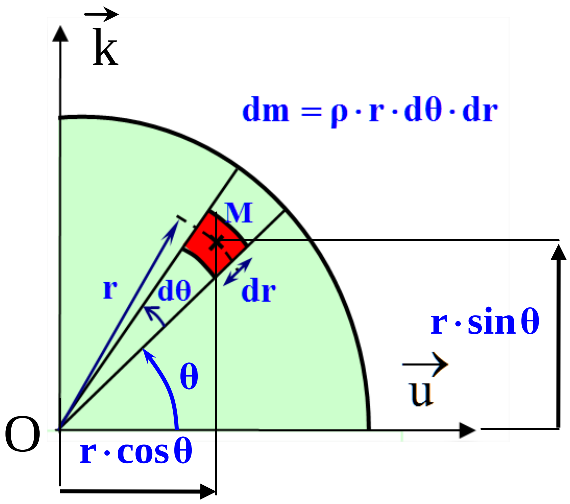
Tous les produits qui contiennent la seconde composante seront donc nuls : $D = F = 0$

$$\Rightarrow \overline{\overline{I_O(S_1)}} = \begin{pmatrix} \frac{m \cdot a^2}{4} & 0 & -\frac{m \cdot a^2}{2 \cdot \pi} \\ 0 & \frac{m \cdot a^2}{2} & 0 \\ -\frac{m \cdot a^2}{2 \cdot \pi} & 0 & \frac{m \cdot a^2}{4} \end{pmatrix}_{\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}} = \begin{pmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & 2 \cdot A & 0 \\ -E & 0 & A \end{pmatrix}_{\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}}$$

Calcul de vérification de E (pour information mais non exigible) :

$$E = \int_{1/4disq} z \cdot x \cdot dm$$

$$= \int_{1/4disq} (r \cdot \sin\theta) \cdot (r \cdot \cos\theta) \cdot \rho \cdot r \cdot d\theta \cdot dr$$



$$= \rho \cdot \int_{r=0}^{r=a} r^3 \cdot dr \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta =$$

$$= \rho \cdot \int_{r=0}^{r=a} r^3 \cdot dr \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta\right) \cdot d\theta$$

$$= \rho \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{-\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \rho \cdot \frac{a^4}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{-1}{2}\right) = \cancel{\rho} \cdot \frac{a^4}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{\cancel{\rho} \cdot (\pi \cdot a^2) / \cancel{4}} \Rightarrow \boxed{E = \frac{m \cdot a^2}{2 \cdot \pi}}$$ Homogénéité

Q2 Déterminer le torseur cinétique $\{\mathscr{C}1/0\}$ de la plaque exprimé au point O.*

Calcul de la résultante cinétique : $\overrightarrow{\mathbf{R_c 1/0}} = \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{\mathbf{V(G,1/0)}}$

$$\overrightarrow{\mathbf{V(G,1/0)}} = \overrightarrow{\mathbf{V(O,1/0)}} + \overrightarrow{\mathbf{GO}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{\Omega 1/0}}$$

$$= -\mathbf{x_G} \cdot \vec{\mathbf{u}} \wedge \dot{\alpha}.\vec{\mathbf{k}} = \dot{\alpha} \cdot \mathbf{x_G} \vec{\mathbf{v}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{\mathbf{R_c 1/0}} = \mathbf{m} \cdot \dot{\alpha} \cdot \mathbf{x_G} \vec{\mathbf{v}}}$$

Homogénéité

Calcul du moment cinétique : $\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{O,1/0}}}$

Pendant la phase d'apprentissage, on écrira la relation complète <u>avec les indices du cours</u> avant de l'appliquer à notre problème et le cas échéant de la simplifier

Relation du cours : $\overrightarrow{\sigma_{A,1/0}} = \overline{\overline{I}}_{(A,\,S)} \times \overrightarrow{\Omega_{1/0}} + \overrightarrow{AG} \wedge m \cdot \overrightarrow{V(A,1/0)}$

Appliquée à notre problème cela donne ,

$\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{O,1/0}}} = \overline{\overline{\mathbb{I}}}_{\mathbf{(O,S)}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{\Omega_{1/0}}} + \overrightarrow{\mathbf{OG}} \wedge \mathbf{m}\overrightarrow{\mathbf{V(O,1/0)}}$ avec O un point fixe. $\Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{O,1/0}}} = \overline{\overline{\mathbb{I}}}_{\mathbf{(O,S)}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{\Omega_{1/0}}}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{O,1/0}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{-E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-E} & \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-E} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \end{pmatrix}_{\mathbf{B_1}}$$

ou encore, $\overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{O,1/0}}} = \mathbf{-E} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \vec{\mathbf{u}} + \mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \vec{\mathbf{k}}$

Homogénéité

$$\Rightarrow \boxed{\mathscr{C}_{1/0} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{m} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{x_G} \cdot \vec{\mathbf{v}} \\ \mathbf{-E} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \vec{\mathbf{u}} + \mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \vec{\mathbf{k}} \end{matrix} \right\}_{\mathbf{O}}}$$

ou encore autre écriture :

$$\boxed{\mathscr{C}_{1/0} = {}_{\mathbf{O}}\left\{ \begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{-E} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \\ \mathbf{m} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{x_G} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \end{matrix} \right\}_{\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{k}}}}$$

Q3 Déterminer le torseur dynamique $\{\mathscr{D}1/0\}$ de la plaque exprimé au point O.*

Calcul de la résultante dynamique : $\overrightarrow{\mathbf{R_d 1/0}} = \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{\mathbf{\Gamma(G,1/0)}}$

$$\overrightarrow{\mathbf{\Gamma(G,1/0)}} = \frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{V(G,1/0)}}}{\mathbf{dt\ /\ B_0}} = \frac{\mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{V(G,1/0)}}}{\mathbf{dt\ /\ B_1}} + \overrightarrow{\mathbf{\Omega 1/0}} \wedge \overrightarrow{\mathbf{V(G,1/0)}}$$

$$= \dot{\alpha} \cdot \mathbf{x_G} \vec{\mathbf{v}} + \dot{\alpha}.\vec{\mathbf{k}} \wedge \dot{\alpha} \cdot \mathbf{x_G} \vec{\mathbf{v}} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathbf{\Gamma(G,1/0)}} = \ddot{\alpha} \cdot \mathbf{x_G} \cdot \vec{\mathbf{v}} - \dot{\alpha}^2 \cdot \mathbf{x_G} \cdot \vec{\mathbf{u}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathbf{R_d 1/0}} = \mathbf{m} \cdot \ddot{\alpha} \cdot \mathbf{x_G} \cdot \vec{\mathbf{v}} - \mathbf{m} \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \mathbf{x_G} \cdot \vec{\mathbf{u}}}$$

Homogénéité

Calcul du moment dynamique : $\overrightarrow{\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{O,1/0}}}$

Relation du cours : $\overrightarrow{\sigma_{A,1/0}} = \dfrac{d\overrightarrow{\sigma_{A,1/0}}}{dt\ /\ B_0} + m \cdot \overrightarrow{V(A,1/0)} \wedge \overrightarrow{V(G,1/0)}$

$$\overrightarrow{\delta_{O,1/0}} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}}}{dt}\right/B_0$$ car O est un point fixe.

$$\overrightarrow{\delta_{O,1/0}} = \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O,1/0}}}{dt}\right/B_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{\sigma_{O,1/0}} = \begin{pmatrix} -E\cdot\ddot{\alpha} \\ 0 \\ A\cdot\ddot{\alpha} \end{pmatrix}_{\vec{u},\vec{v},\vec{k}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -E\cdot\dot{\alpha} \\ 0 \\ A\cdot\dot{\alpha} \end{pmatrix}_{\vec{u},\vec{v},\vec{k}} = \begin{pmatrix} -E\cdot\ddot{\alpha} \\ -E\cdot\dot{\alpha}^2 \\ A\cdot\ddot{\alpha} \end{pmatrix}_{\vec{u},\vec{v},\vec{k}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_{O,1/0}} = = \begin{pmatrix} -E\cdot\ddot{\alpha} \\ -E\cdot\dot{\alpha}^2 \\ A\cdot\ddot{\alpha} \end{pmatrix}_{\vec{u},\vec{v},\vec{k}}}$$

Homogénéité

Ecriture du torseur dynamique :

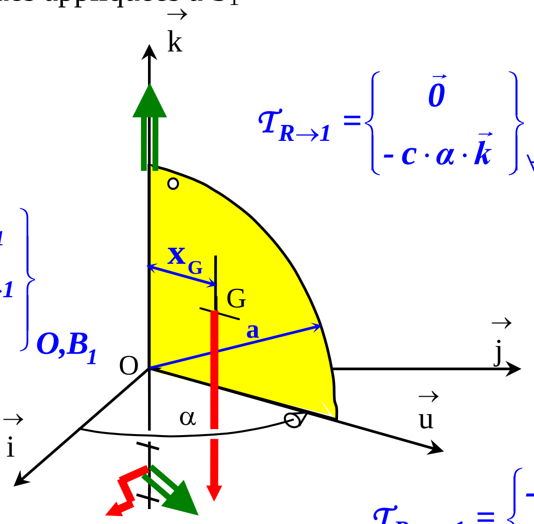
$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{D}_{1/0} = {}_{O}\left\{\begin{matrix} -m\cdot\dot{\alpha}^2\cdot x_G & -E\cdot\ddot{\alpha} \\ m\cdot\ddot{\alpha}\cdot x_G & -E\cdot\dot{\alpha}^2 \\ 0 & A\cdot\ddot{\alpha} \end{matrix}\right\}_{\vec{u},\vec{v},\vec{k}}}$$

Q4 Déterminer les torseurs des actions mécaniques appliquées à S_1

- **<u>On isole S_1</u>.**
- **<u>Bilan des actions mécaniques</u>** **(B.A.M.E.)**

$$\mathcal{T}_{R\to 1} = \left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ -c\cdot\alpha\cdot\vec{k} \end{matrix}\right\}_{\forall le\ pt}$$

$$\mathcal{T}_{0\to 1} = \left\{\begin{matrix} X_{0\to 1} & L_{O,0\to 1} \\ Y_{0\to 1} & M_{O,0\to 1} \\ Z_{0\to 1} & 0 \end{matrix}\right\}_{O,B_1}$$



$$\mathcal{T}_{Pes\to 1} = \left\{\begin{matrix} -m\cdot g\cdot\vec{k} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G$$

Q5 Appliquer le P.F.D. et en déduire le torseur de l'action mécanique $\{O_{0\to1}\}$ transmise par la liaison pivot exprimé au point O. , ainsi que la loi d'évolution du paramètre α au cours du temps, sachant qu'on lâche la plaque, sans vitesse initiale, d'une position α_0.

➤ **Ecriture du P.F.D. au point O** (car on demande de déterminer les composantes de l'action transmise par la liaison pivot).

$$\overrightarrow{M_O Pes \to 1} = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{R\ Pes \to 1} = x_G \cdot (\vec{u} + \cancel{\vec{k}}) \wedge -m \cdot g \cdot \vec{k} = x_G \cdot (\vec{u} + \cancel{\vec{k}}) \wedge -m \cdot g \cdot \vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_O Pes \to 1} = \boxed{x_G \cdot m \cdot g \cdot \vec{v}}$$

Théorème de la résultante dynamique : $\overrightarrow{R\ \bar{1} \to 1} = \overrightarrow{R_{d\,1/0}}$

$$\left.\begin{array}{lll}
(1) & X_{0\to1} & = -m \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot x_G \\
(2) & Y_{0\to1} & = m \cdot \ddot{\alpha} \cdot x_G \\
(3) & Z_{0\to1} - m \cdot g & = 0
\end{array}\right.$$

← 5 équations permettant de déterminer les efforts de liaisons.

Théorème du moment dynamique : $\overrightarrow{M_O\ \bar{1} \to 1} = \overrightarrow{\delta_{O,1/0}}$

$$\begin{array}{lll}
(4) & L_{0\to1} & = -E \cdot \ddot{\alpha} \\
(5) & M_{0\to1} + x_G \cdot m \cdot g & = -E \cdot \dot{\alpha}^2 \\
(6) & -c \cdot \alpha & = A \cdot \ddot{\alpha}
\end{array}$$

← Equation du mouvement

Elle donne la relation entre l'effort extérieur appliqué et le paramètre du mouvement.

➤ **Résultats** On en déduit les actions transmises par la liaison pivot.

$$\boxed{\left\{ \underset{Pivot}{0\to1} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} -m \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot x_G & -E \cdot \ddot{\alpha} \\ m \cdot \ddot{\alpha} \cdot x_G & -E \cdot \dot{\alpha}^2 \\ m \cdot g & 0 \end{array} \right\}_{O,B_1}}$$

Homogénéité

Q5 (suite) En déduire la loi d'évolution du paramètre α au cours du temps, sachant qu'on lâche la plaque, sans vitesse initiale, d'une position α_0.

On cherche la solution de l'équation *(6)* : $A \cdot \ddot{\alpha} + c \cdot \alpha = 0$

- Elle est de la forme *(a)* $\alpha = C_1 \cdot \cos \omega t + C_2 \cdot \sin \omega t$ dont on calcule les dérivées :

(b) $\dot{\alpha} = -C_1 \cdot \omega \cdot \sin \omega t + C_2 \cdot \omega \cdot \cos \omega t$

(c) $\ddot{\alpha} = -C_1 \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t - C_2 \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t$

- Avec les conditions initiales :

A $t = 0$, $\alpha = \alpha_0$ l'équation *(a)* $\Rightarrow C_1 = \alpha_0$

$\dot{\alpha} = 0$ l'équation *(b)* $\Rightarrow C_2 = 0$

Ainsi l'équation (a) devient : $\boldsymbol{\alpha = \alpha_0 \cdot \cos \omega t}$ et l'équation (c) : $\boldsymbol{\ddot{\alpha} = -\alpha_0 \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t}$

En remplaçant α et $\ddot{\alpha}$ dans l'équation (6) : $\boldsymbol{A \cdot \ddot{\alpha} + c \cdot \alpha = 0}$, on obtient :

$$A \cdot (-\cancel{\alpha_0} \cdot \omega^2 \cdot \cancel{\cos \omega t}) + c \cdot (\cancel{\alpha_0} \cdot \cancel{\cos \omega t}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{c}{A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{c}{A}}}$$

D'où l'équation du mouvement : $$\boxed{\alpha = \alpha_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{c}{A}} \cdot t\right)}$$

avec **c** la raideur de torsion du ressort,
et **A** le moment d'inertie du ½ disque par rapport à l'axe $(O, \vec{k})$.

Remarque importante.

Si la question avait été seulement la détermination de la loi de mouvement, l'application du P.F.D. se serait limitée à l'écriture d'une seule équation scalaire :

On aurait alors fallu écrire :

➤ **P.F.D.**

Théorème du moment dynamique en projection sur l'axe $(O, \vec{k})$: $\overrightarrow{M_{O\,\bar{1} \rightarrow 1}} \cdot \vec{k} = \overrightarrow{\delta_{O,1/0}} \cdot \vec{k}$

Ainsi seule l'équation (6) aurait été prise en compte.

$$\boxed{-c \cdot \alpha = A \cdot \ddot{\alpha} \quad \leftarrow \textit{Equation du mouvement}}$$

Dans les exercices à venir, il faudra savoir choisir parmi les six équations du P.F.D, laquelle (lesquelles) choisir, pour répondre à la (aux) question(s) posée(s).