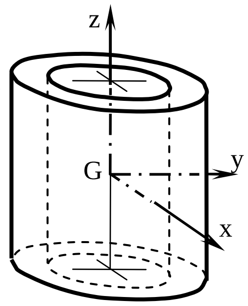
<u>EXERCICE 5</u> – (suite) DETERMINATION D'OPERATEURS D'INERTIE.

Corrigé



5-3 TUBE EPAIS

Soit un tube **S** homogène, de rayon intérieur R_i, de rayon extérieur R_e, de hauteur H et de masse m.

2 – Quel serait l'opérateur d'inertie d'un tube d'épaisseur négligeable ?

<u>Question 1</u>- Déterminer son opérateur d'inertie $\mathbb{I}(G,S)$ par rapport au repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

La forme générale de la matrice d'inertie s'écrit : $\mathbb{I}(G,S) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{-F} & \mathbf{-E} \\ \mathbf{-F} & \mathbf{B} & \mathbf{-D} \\ \mathbf{-E} & \mathbf{-D} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$

Le tube est un solide de révolution d'axe $(G, \vec{z}) \Rightarrow$ les produits d'inertie sont tous nuls et les moments d'inertie suivant les axes $(G, \vec{x})$ et $(G, \vec{y})$ sont égaux.

D'où la forme retenue : $\mathbb{I}(G,S) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$. Il reste à calculer **A** et **C**

<u>Deux méthodes sont proposées :</u>

<u>La 1ère méthode</u> repose sur la connaissance du moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe de révolution :

$$\mathbf{I_{Gz/Cyl} = C_{Cyl} = \frac{m_{Cyl} \cdot R_{Cyl}^2}{2}}$$

On considère alors que le tube est la soustraction de deux cylindres.

$$\mathbf{I_{Gz/Tube} = I_{Gz/Cyl_{ext}} - I_{Gz/Cyl_{int}} = \frac{m_e \cdot R_e^2}{2} - \frac{m_i \cdot R_i^2}{2}}$$

Attention $\mathbf{m \neq m_e \neq m_i}$ · On est donc amené à exprimer $\mathbf{m_e}$ et $\mathbf{m_i}$ · en fonction des paramètres dimensionnels et de la masse volumique. $\mathbf{m_e = \pi \cdot R_e^2 \cdot H \cdot \rho}$ et $\mathbf{m_i = \pi \cdot R_i^2 \cdot H \cdot \rho}$

En remplaçant, $\mathbf{I_{Gz/Tube} = I_{Gz/Cyl_{ext}} - I_{Gz/Cyl_{int}} = \frac{(\pi \cdot R_e^2 \cdot H \cdot \rho) \cdot R_e^2}{2} - \frac{(\pi \cdot R_i^2 \cdot H \cdot \rho) \cdot R_i^2}{2}}$

$$\mathbf{\Rightarrow I_{Gz/Tube} = \frac{\pi \cdot H \cdot \rho \cdot \left(R_e^4 - R_i^4\right)}{2}}$$

On réintroduit la masse $\mathbf{m = \pi \cdot H \cdot \rho \left(R_e^2 - R_e^2\right)}$

$$\mathbf{\Rightarrow I_{Gz} = \frac{\pi \cdot H \cdot \rho \cdot \left(R_e^4 - R_i^4\right)}{2} \cdot \frac{m}{\pi \cdot H \cdot \rho \left(R_e^2 - R_i^2\right)} = \frac{m \cdot \left(R_e^4 - R_i^4\right)}{2 \cdot \left(R_e^2 - R_i^2\right)} \Rightarrow \boxed{C = \frac{m \cdot \left(R_e^2 + R_i^2\right)}{2}}}$$

On détermine ensuite $\mathbf{I_{Gx} = \int_s (y^2 + z^2)\cdot dm}$

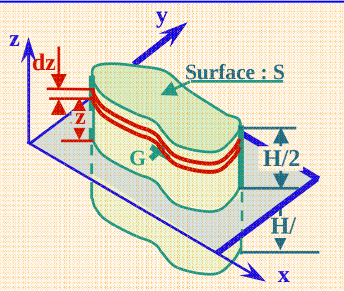
On note que $\mathbf{I_{Gz} = \int_s (x^2 + y^2)\cdot dm}$ et que $\mathbf{\int_s x^2 \cdot dm = \int_s y^2 \cdot dm = \frac{I_{Gz}}{2} = \frac{m\cdot\left(R_e{}^2 + R_i{}^2\right)}{4}}$

Il reste à calculer $\mathbf{I_{xGy} = \int_s z^2 \cdot dm}$

Rappel du cours :

Le tube est un solide qui peut être généré par une extrusion de direction ($\vec{z}$)

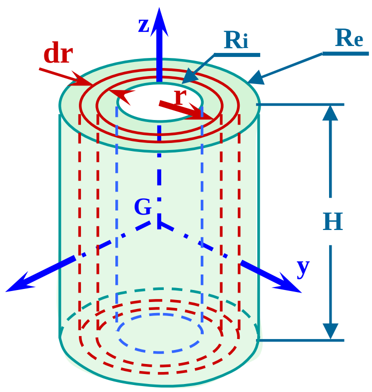
$$\Rightarrow \mathbf{I_{xGy} = \int_s z^2 \cdot dm = m\cdot\frac{H^2}{12}}$$



On en déduit $\mathbf{A = I_{Gx} = \int_s y^2 \cdot dm + \int_s z^2 \cdot dm} \Rightarrow \boxed{\mathbf{A = \frac{m\cdot\left(R_e{}^2 + R_i{}^2\right)}{4} + \frac{m\cdot H^2}{12}}}$

$$\boxed{\mathbb{I}(G,S) = \begin{pmatrix} \mathbf{\frac{m\cdot\left(R_e{}^2+R_i{}^2\right)}{4} + \frac{m\cdot H^2}{12}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\frac{m\cdot\left(R_e{}^2+R_i{}^2\right)}{4} + \frac{m\cdot H^2}{12}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\frac{m\cdot\left(R_e{}^2+R_i{}^2\right)}{2}} \end{pmatrix}_{B_0}}$$

<u>**La seconde méthode**</u> consiste calculer $\mathbf{I_{Gz} = C}$ comme cela a été fait en cours, mais en modifiant les bornes d'intégration pour le rayon r.



$$\mathbf{C = \int_s r^2 \cdot dm = 2\pi\cdot H\cdot\rho\cdot\int_{r=Ri}^{r=Re} r^3 \cdot dr}$$

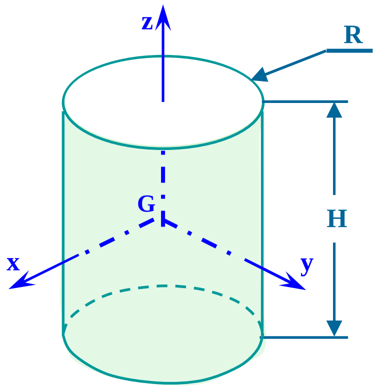
$$\mathbf{= 2\pi\cdot H\cdot\rho\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=Ri}^{r=Re_e} = 2\pi\cdot H\cdot\rho\cdot\frac{Re^4 - Ri^4}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{C = \pi\cdot H\cdot\rho\cdot\frac{Re^4 - Ri^4}{2}}}$$ Il reste à réintroduire la masse comme dans la méthode 1.

Pour le calcul de A on procède en utilisant la propriété des solides obtenus par extrusion (là encore comme dans la méthode 1).

Question 2 – Quel serait l'opérateur d'inertie d'un tube d'épaisseur négligeable ?

Il suffit de faire $\mathbf{Re = Ri = R}$ dans l'expression de $\mathbb{I}(G,S)$ on obtient immédiatement



$$\boxed{\mathbb{I}(G,S) = \begin{pmatrix} \frac{m\cdot R^2}{2}+\frac{m\cdot H^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\cdot R^2}{2}+\frac{m\cdot H^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m\cdot R^2 \end{pmatrix}_{B_0}}$$

Remarque :

Pour calculer $\mathbf{I_{Gz/Tube\,peu\,épais}}$

On peut écrire la définition : $\mathbf{I_{Gz/Tube\,peu\,épais}} = \int_S (x^2+y^2)\cdot dm = \int_S r^2\cdot dm$

On voit ici que tous les points du cylindre sont situés à la même distance de l'axe $(G, \vec{z})$.

Donc pour tout point, $\mathbf{r = R} \Rightarrow \mathbf{I_{Gz/Tube\,peu\,épais}} = \int_S R^2\cdot dm$

Comme $\mathbf{R = cste} \Rightarrow \mathbf{I_{Gz/Tube\,peu\,épais}} = R^2\cdot\int_S dm = m\cdot R^2 \Rightarrow \boxed{C = m\cdot R^2}$

On retrouve donc par un calcul très simple le résultat précédent.