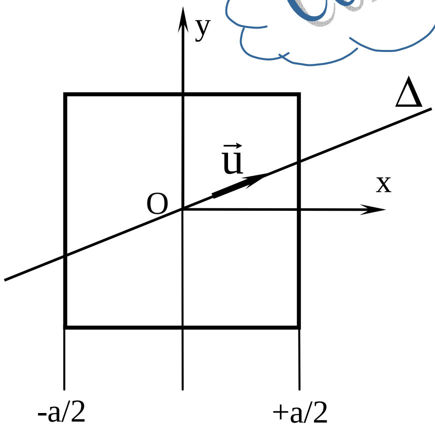
Corrigé

<u>EXERCICE 5</u> – DETERMINATION D'OPERATEURS D'INERTIE.

5-1 PLAQUE CARRE

Soit une plaque carrée de coté a, de centre de gravité O, d'épaisseur négligeable et de masse m.



1- Déterminer l'opérateur d'inertie de la plaque par rapport au repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

La plaque peut être obtenue par extrusion d'un segment de largeur a entre -a/2 et +a/2

$$\int_{-a/2}^{+a/2} x^2 \cdot dm = \frac{ma^2}{12} \quad \textbf{idem pour} \quad \int_{-a/2}^{+a/2} y^2 \cdot dm$$

$$\Rightarrow A = \int_S (y^2 + \cancel{z^2}) \cdot dm = B = \int_S (\cancel{z^2} + x^2) \cdot dm = \frac{ma^2}{12} \quad \text{et} \quad C = \int_S (x^2 + y^2) \cdot dm = \frac{ma^2}{6}$$

Il y a trois plans de symétrie or deux suffisent pour avoir les produits $D = E = F = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\bar{I}}(O,S) = \frac{ma^2}{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

2- En déduire le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ défini par le point O et le vecteur unitaire $\vec{u}\,(\alpha, \beta, 0)$.

$$I_{O,u} = \vec{u} \cdot \left[\bar{\bar{I}}(O,S) \cdot \vec{u}\right] = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\frac{ma^2}{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\frac{ma^2}{12} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{ma^2}{12}\left(\alpha^2 + \beta^2\right)$$

avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1 \Rightarrow \boxed{I_{O,u} = \frac{ma^2}{12}}$

On en déduit que quelque soit le vecteur unitaire, le moment par rapport à l'axe passant par O est inchangé.

On retrouve ce résultat en exprimant la matrice dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$

$$P^{-1} \cdot \bar{\bar{I}}(O,S) \cdot P \quad \textbf{avec} \quad P = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$P^{-1} \cdot \bar{\bar{I}}(O,S) \cdot P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{ma^2}{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{ma^2}{12} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \cdot \bar{\bar{I}}(O,S) \cdot P = \frac{ma^2}{12} \cdot \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & -\alpha\beta + \beta\alpha & 0 \\ -\beta\alpha + \alpha\beta & \beta^2 + \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \Rightarrow \boxed{\bar{\bar{I}}(O,S) = \frac{ma^2}{12} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{(\vec{u},\vec{v},\vec{z})}}$$

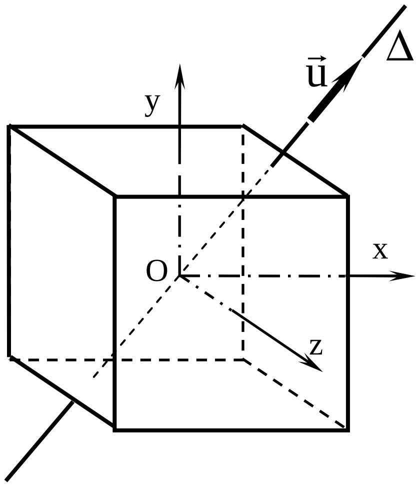
L'opérateur d'inertie est donc inchangé par rotation autour de l'axe $(O, \vec{z})$

5-2 CUBE

Soit un cube de coté a, , de centre de gravité O et de masse m.

1- Déterminer son opérateur d'inertie par rapport au repère O

2- En déduire le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ défini par le point O et le vecteur unitaire $\vec{u}\ (\alpha,\beta,\gamma)$.



Le cube peut être obtenu par extrusion d'un carré de coté a entre -a/2 et +a/2

$$\int_{-a/2}^{+a/2} x^2\cdot dm = \frac{ma^2}{12}\ \text{ idem pour } \int_{-a/2}^{+a/2} y^2\cdot dm \ \text{ et pour } \int_{-a/2}^{+a/2} z^2\cdot dm$$

$$\Rightarrow A=\int_S (y^2+z^2)\cdot dm = B=\int_S (z^2+x^2)\cdot dm = C=\int_S (x^2+y^2)\cdot dm = \frac{ma^2}{6}$$

Il y a trois plans de symétrie or deux suffisent pour avoir les produits $D=E=F=0$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{\overline{I}}(O,S)=\frac{ma^2}{6}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

$$I_{O,u}=\vec{u}\cdot\left[\overline{\overline{I}}(O,S)\cdot\vec{u}\right] = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\cdot\left[\frac{ma^2}{6}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\cdot\left[\frac{ma^2}{6}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\right]=\frac{ma^2}{6}\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)$$

avec $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\Rightarrow \boxed{I_{Ou}=\frac{ma^2}{6}}$

On retrouverait ce résultat en exprimant la matrice dans la base $(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{z})$

$$\boxed{\overline{\overline{I}}(O,S)=\frac{ma^2}{6}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}_{(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})}}$$

L'opérateur d'inertie est donc inchangé quelque soit la base orthonormée centrée en O.