PSI – T.D. de SII

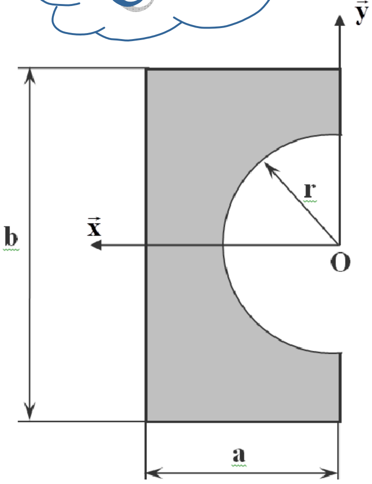
Corrigé

CI3 : modéliser, analyser et expérimenter les comportements dynamique et énergétique d'une chaîne d'énergie d'un système.

GEOMETRIE DES MASSES EN MOUVEMENT

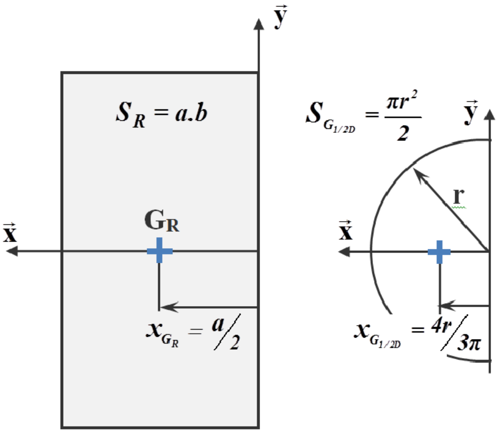
EXERCICE 1 RECHERCHE DE BARYCENTRES

Q 1. Déterminer la position du centre d'inertie de la plaque rectangulaire découpée ci-dessous par la définition du CdG. (Eventuellement ultérieurement par Guldin)



$$m \cdot \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{OG_i} \quad \textit{On donne } x_{G_{1/2D}} = {}^{4r}\!/_{3\pi}$$

Par symétrie, le centre de gravité appartient à l'axe $(O, \vec{x})$

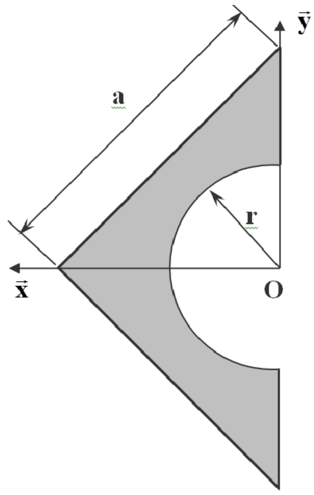


$$S \cdot x_G = S_R \cdot x_{G_R} - S_{1/2D} \cdot x_{G_{1/2D}}$$

$$\left(a \cdot b - \frac{\pi r^2}{2}\right) \cdot x_G = a \cdot b \cdot {}^{a}\!/_{2} - \frac{\pi r^2}{2} \cdot {}^{4r}\!/_{3\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_G = \frac{3 \cdot a^2 b - 4r^3}{6 \cdot a b - 3\pi r^2}}$$

Q 2. Déterminer la position du centre d'inertie de la plaque triangulaire découpée ci-dessous par la définition du CdG. (Eventuellement ultérieurement par Guldin).

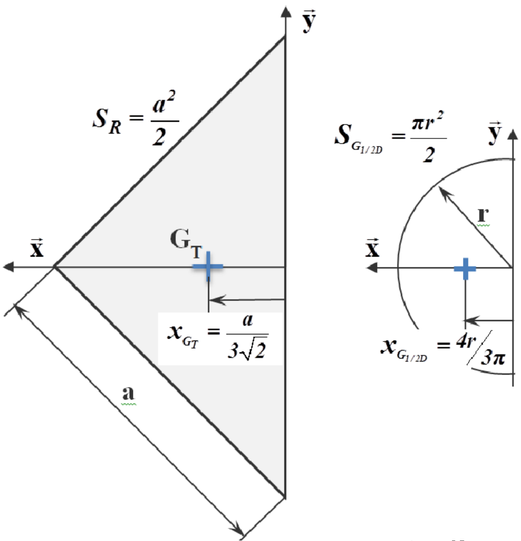


$$m \cdot \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{OG_i}$$

Par symétrie, le centre de gravité appartient à l'axe $(O, \vec{x})$

$$S \cdot x_G = S_T \cdot x_{G_T} - S_{1/2D} \cdot x_{G_{1/2D}}$$

$$\left(\frac{a^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2}\right) \cdot x_G = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{3\sqrt{2}} - \frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{4r}{3\pi}$$



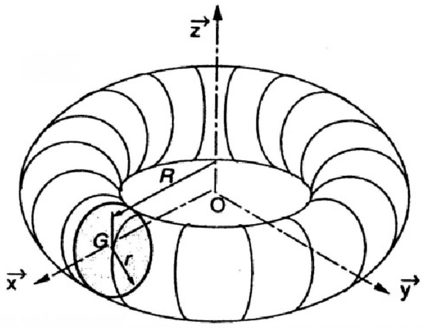
$$\Rightarrow \boxed{x_G = \frac{a^3 - 4\sqrt{2} r^3}{3\sqrt{2}(a^2 - \pi r^2)}}$$

Ou encore $\boxed{x_G = \frac{a^3\sqrt{2} - 8r^3}{6 \cdot (a^2 - \pi r^2)}}$

EXERCICE 2 APPLICATIONS DU THEOREME DE GULDIN

2-1 Tore

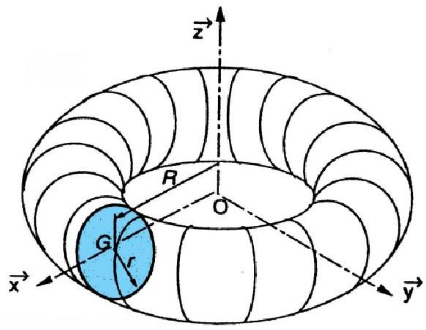
- Déterminer la surface et le volume (V) d'un tore de rayons r et R.



Surface du tore :

D'après Guldin $S = X_{G_L} \cdot \theta \cdot L$

$S = R \cdot 2\pi \cdot 2\pi r \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = 4\pi^2 \cdot R \cdot r}$



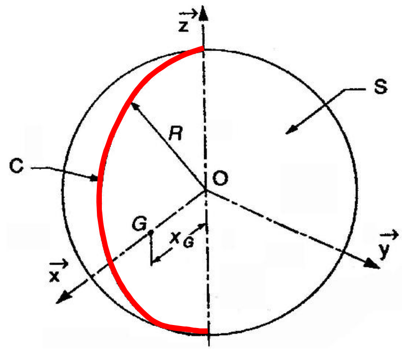
Volume du tore :

D'après Guldin $V = X_{G_S} \cdot \theta \cdot S$

$V = R \cdot 2\pi \cdot \pi \cdot r^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = 2\pi^2 \cdot r^2 \cdot R}$

2-2 Sphère

- Déterminer la position du centre d'inertie du demi-cercle (C)



On connaît l'expression de la surface de la sphère : $S = 4 \cdot \pi \cdot R^2$

On cherche la position du centre de gravité de la ligne qui par rotation engendre la surface de la sphère :

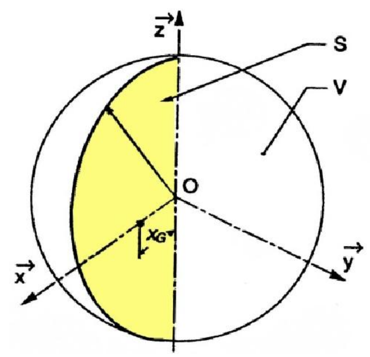
D'après Guldin $S = X_{G_L} \cdot \theta \cdot L$

Avec $L = \pi \cdot R$ *et* $\theta = 2 \cdot \pi$

$$\Rightarrow \quad X_{G_L} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^2}{2\pi \cdot \pi R} \Rightarrow \boxed{X_{G_L} = \frac{2 \cdot R}{\pi}}$$

2-3 Boule

- Déterminer la position du centre d'inertie du demi disque (S)



On connaît l'expression du volume de la sphère : $S = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

On cherche la position du centre de gravité de la surface qui par rotation engendre le volume de la sphère :

D'après Guldin $V = X_{G_S} \cdot \theta \cdot S$

$$Avec \ S = \frac{\pi \cdot R^2}{2} \ et \ \theta = 2 \cdot \pi$$

$$\Rightarrow \quad X_{G_S} = \frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3 \cdot 2\pi \cdot \frac{\pi \cdot R^2}{2}} \Rightarrow \boxed{X_{G_S} = \frac{4 \cdot R}{3 \cdot \pi}}$$

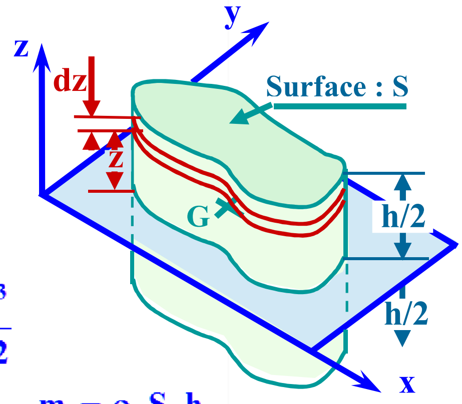
<u>EXERCICE 3</u> **RECHERCHE DE MATRICES D'INERTIES**

Corrigé

3-1 Inertie d'un solide extrudé par rapport à son plan de symétrie

On donne la méthode pour calculer le moment d'inertie du solide extrudé ci-contre par rapport au plan $(G, \vec{x}, \vec{y})$.

Recherche du moment d'inertie par rapport au plan $(\vec{x}, G, \vec{y})$.



Le moment d'inertie s'écrit : $I_{xGy} = \int_s z^2 \cdot dm$

On choisit pour volume de matière élémentaire, une plaque de section S et d'épaisseur dz.

Il s'écrit : $dm = \rho \cdot dv = \rho \cdot S \cdot dz$ **d'où :**

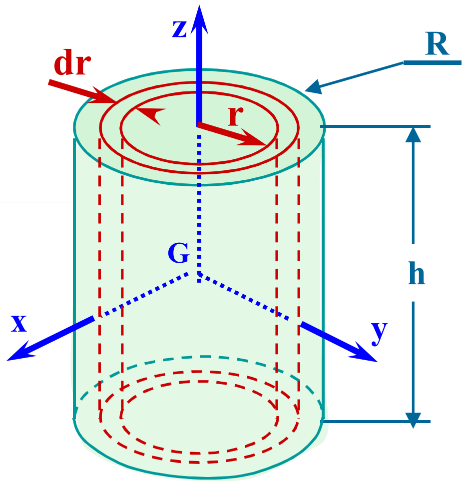
$$I_{xGy} = \rho \cdot S \cdot \int_s z^2 \cdot dz = \rho \cdot S \cdot \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2} \Rightarrow I_{xGy} = \rho \cdot S \cdot \frac{h^3}{12}$$

On fait intervenir la masse dans l'expression de I_{xGy} **avec** $m = \rho \cdot S \cdot h$

$$I_{xGy} = \cancel{\rho} \cdot \cancel{S} \cdot \frac{h^3}{12} \cdot \frac{m}{\cancel{\rho} \cdot \cancel{S} \cdot h} \Rightarrow \boxed{I_{xGy} = m \cdot \frac{h^2}{12}}$$

3-2 Matrice d'inertie d'un cylindre :

- On donne la résolution permettant la détermination du moment d'inertie C du cylindre de rayon R et de hauteur h par rapport à l'axe $(G\vec{z})$.



On considère un tube de diamètre r et d'épaisseur dr
Ce volume de matière élémentaire a pour masse :

$$dm = \rho \cdot dv = \rho \cdot dS \cdot \theta \cdot X_{G_S} = \rho \cdot h \cdot dr \cdot 2\pi \cdot r$$

Le moment d'inertie I_{GZ} s'écrit :

$$C = \int_s r^2 \cdot dm = \rho \cdot 2\pi \cdot h \cdot \int_{r=0}^{r=R} r^3 \cdot dr$$

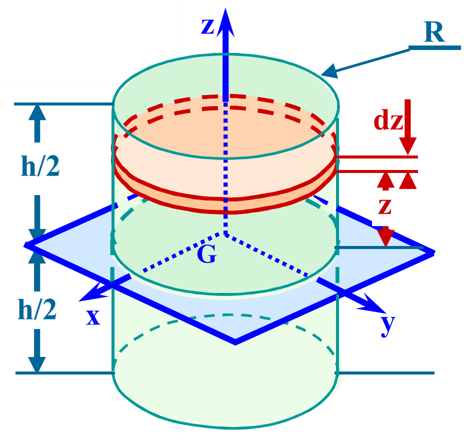
$$= \rho \cdot 2\pi \cdot h \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=R} = \rho \cdot 2\pi \cdot h \cdot \frac{R^4}{4}$$

On fait intervenir ma masse dans l'expression de I_{GZ} **avec** $m = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$

d'où $C = \cancel{\rho} \cdot \cancel{2}\cancel{\pi} \cdot \cancel{h} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \frac{m}{\cancel{\rho} \cdot \cancel{\pi} \cdot R^2 \cdot \cancel{h}} \Rightarrow \boxed{C = \frac{m \cdot R^2}{2}}$

- Déterminer le moment d'inertie A par rapport à l'axe $(G\vec{x})$.

$$\boxed{C = I_{Gz} = \frac{m \cdot R^2}{2}}$$



On détermine ensuite $I_{Gx} = \int_s (y^2 + z^2) \cdot dm$

$$I_{Gz} = \int_s (x^2 + y^2) \cdot dm$$

Or par raison de symétrie de révolution, $\int_s x^2 \cdot dm = \int_s y^2 \cdot dm = \dfrac{I_{Gz}}{2} = \dfrac{m \cdot R^2}{4}$

d'où $I_{Gx} = \int_s (y^2 + z^2) \cdot dm = \int_s y^2 \cdot dm + \int_s z^2 \cdot dm = \dfrac{m \cdot R^2}{4} + \dfrac{m \cdot h^2}{12}$

On s'appuie sur le résultat obtenu pour le solide extrudé : $\boxed{I_{xGy} = m \cdot \dfrac{h^2}{12}}$ $\boxed{I_{Gx} = m \cdot \left(\dfrac{R^2}{4} + \dfrac{h^2}{12}\right)}$

- Exprimer la matrice d'inertie au centre d'inertie G dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

On remarque que les trois plan du repère sont plan de symétrie. Les produits d'inertie sont donc nuls.

$$\overline{\overline{\mathbb{I}}}(G,S) = \begin{pmatrix} m \cdot \left(\dfrac{R^2}{4} + \dfrac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \left(\dfrac{R^2}{4} + \dfrac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{m \cdot R^2}{2} \end{pmatrix}_{B0}$$

3-3 Matrice d'inertie du parallélépipède rectangle

Recherche des moments d'inertie par rapport aux trois plans parallèles aux axes du repère et

Pour le plan (x, G, y), on extrude un rectangle a×b entre –c/2 et +c/2.

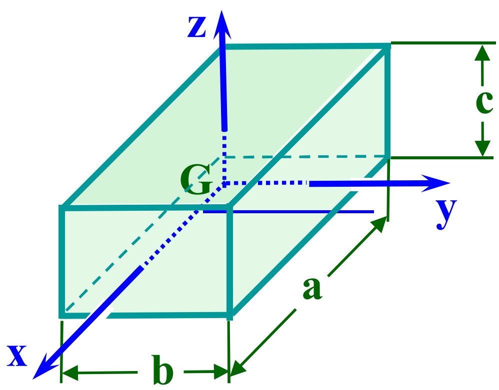
On obtient : $I_{xGy} = \dfrac{m \cdot c^2}{12}$

Pour le plan (y, G, z), on extrude un rectangle de section b×c entre –a/2 et +a/2.

On obtient : $I_{yGz} = \dfrac{m \cdot a^2}{12}$

Pour le plan (z, G, x), on extrude un rectangle de section c×a entre –b/2 et +b/2.

On obtient : $I_{zGx} = \dfrac{m \cdot b^2}{12}$



Recherche des moments d'inertie par rapport aux trois axes passant par G.

Pour l'axe (G, x),

$\int_s (y^2 + z^2) \cdot dm = \int_s y^2 \cdot dm + \int_s z^2 \cdot dm$

On obtient : $I_{Gx} = I_{zGx} + I_{xGy} \Rightarrow \boxed{I_{Gx} = A = m \cdot \dfrac{b^2 + c^2}{12}}$

Pour l'axe (G, y),

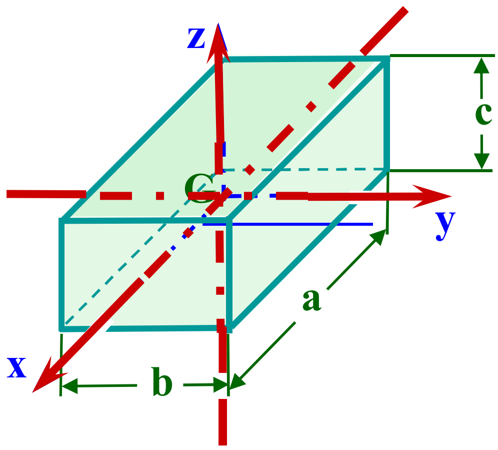
$\int_s (z^2 + x^2) \cdot dm = \int_s z^2 \cdot dm + \int_s x^2 \cdot dm$

On obtient : $I_{Gy} = I_{xGy} + I_{yGz} \Rightarrow \boxed{I_{Gy} = B = m \cdot \dfrac{c^2 + a^2}{12}}$

Pour l'axe (G, z),

$I_{Gz} = \int_s (x^2 + y^2) \cdot dm = \int_s x^2 \cdot dm + \int_s y^2 \cdot dm$

On obtient : $I_{Gz} = I_{yGz} + I_{zGx} \Rightarrow \boxed{I_{Gz} = C = m \cdot \dfrac{a^2 + b^2}{12}}$



On en déduit la diagonale de la matrice d'inertie

Puis les produits d'inertie :

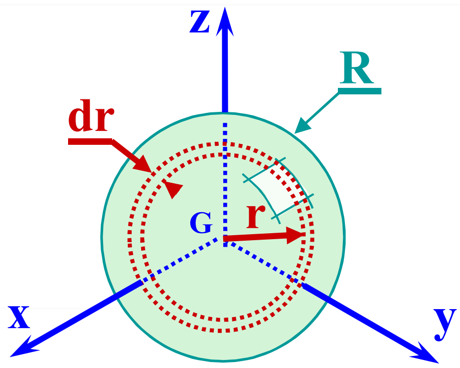
On remarque que les trois plan du repère sont plan de symétrie. Les produits d'inertie sont donc nuls.

$$\overline{\overline{\mathbb{I}(G,S)}} = \begin{pmatrix} m\cdot\dfrac{b^2+c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m\cdot\dfrac{c^2+a^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m\cdot\dfrac{a^2+b^2}{12} \end{pmatrix}_{B0}$$

3-4 Inertie d'une sphère.

On donne le moment d'inertie $I_G(S) = \dfrac{3\cdot m.R^2}{5}$

Déterminer l'opérateur d'inertie d'une sphère de rayon R par rapport à un repère situé en son centre



On remarque une symétrie sphérique

$$\int_s x^2\cdot dm = \int_s y^2\cdot dm = \int_s z^2\cdot dm = \frac{1}{3}\cdot I_G$$

$$I_{Gx} = \int_s (y^2+z^2)\cdot dm = \frac{2}{5}\cdot m\cdot R^2 = I_{Gy} = I_{Gz}$$

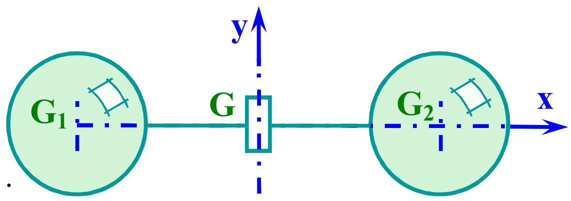
On note que les plans de symétrie annulent les produits d'inertie

$$\boxed{\mathbb{I}(G,S) = \frac{2mR^2}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{B0}}$$

3-5 Balancier

Le solide (S) ci-contre est constitué de deux sphères identiques de masse M et de rayon R dont les centres sont situés à une distance d de l'axe $(G,\vec{y})$.

Déterminer son moment d'inertie I_Δ du par rapport à l'axe $(G,\vec{y})$.



Le moment d'inertie de la première sphère par rapport à l'axe $(G_1,\vec{y})$

$$I_{G_1y} = \frac{2\cdot MR^2}{5}$$

On applique Huygens pour déterminer le moment d'inertie de la première sphère par rapport à l'axe $(G,\vec{y})$

$$I_{Gy} = I_{G_1y} + Md^2$$

Pour l'autre sphère le résultat est le même.

On en déduit que pour l'ensemble des deux sphères $I_{Gy} = 2\cdot(I_{G_1y} + Md^2)$