Exercice 27 ASSERVISSEMENT DE VITESSE
CORRECTION AVEC UN P.I.D.

Corrigé

Correcteur : $C(p) = K_P \cdot \dfrac{1+\tau_i p}{\tau_i p} \cdot \dfrac{1+\tau_d p}{1+a\tau_d p}$

1-Déterminer K

$$K = \frac{3\cdot 10^3\, t\cdot min^{-1}}{60\ V} \Rightarrow \boxed{K = 50\ t\cdot min^{-1}\cdot V^{-1}}$$

2- Déterminer les transmittances G, T,et A, avec C(p) =1, sachant que le gain en boucle ouverte est égal à 1.

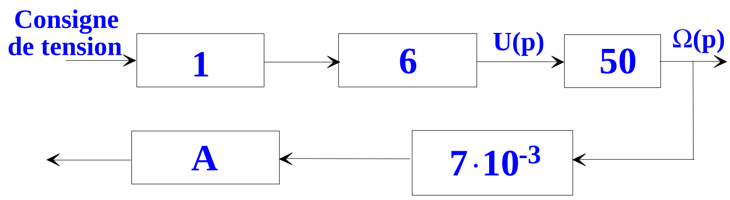


Schéma bloc statique boucle ouverte

$$T = 7mV.\cdot t^{-1}.\cdot min = 7\cdot 10^{-3}\, V\cdot t^{-1}.min$$

Le gain en boucle ouverte étant égal à 1,

$$1\times 6\times 60\times 7\cdot 10^{-3}\times A = 1 \Rightarrow A = \frac{10^3}{6\times 60\times 7} \Rightarrow \boxed{A = 0{,}476}$$

3- En déduire $H_1(p)$ en boucle ouverte

On a choisi A pour avoir un gain en B.O. égal à 1 $\Rightarrow$ $\boxed{H_1(p) = \dfrac{1}{(0{,}004p+1).(0{,}04p+1)}}$

4- Tracer les courbes de Bode de $H_1(p)$.

H1(p).est factorisée sous la forme d'un produit de deux fonctions

Diagramme asympotique :

$$H_{1a}(p) = \frac{1}{1+\dfrac{p}{25}}$$

cassure à $\omega = 25 rad.s^{-1}$ une **pente nulle avant la cassure** et une pente à **-20 dB/ décade après la cassure.**
Avec une phase à **0° avant la cassure** et à **-90°après la cassure**

$$H_{1b}(p) = \frac{1}{1+\dfrac{p}{250}}$$

cassure à $\omega = 250 rad.s^{-1}$ une **pente nulle avant la cassure** et une pente à **-20 dB/ décade après la cassure.**
Avec une phase à **0° avant la cassure** et à **-90°après la cassure**

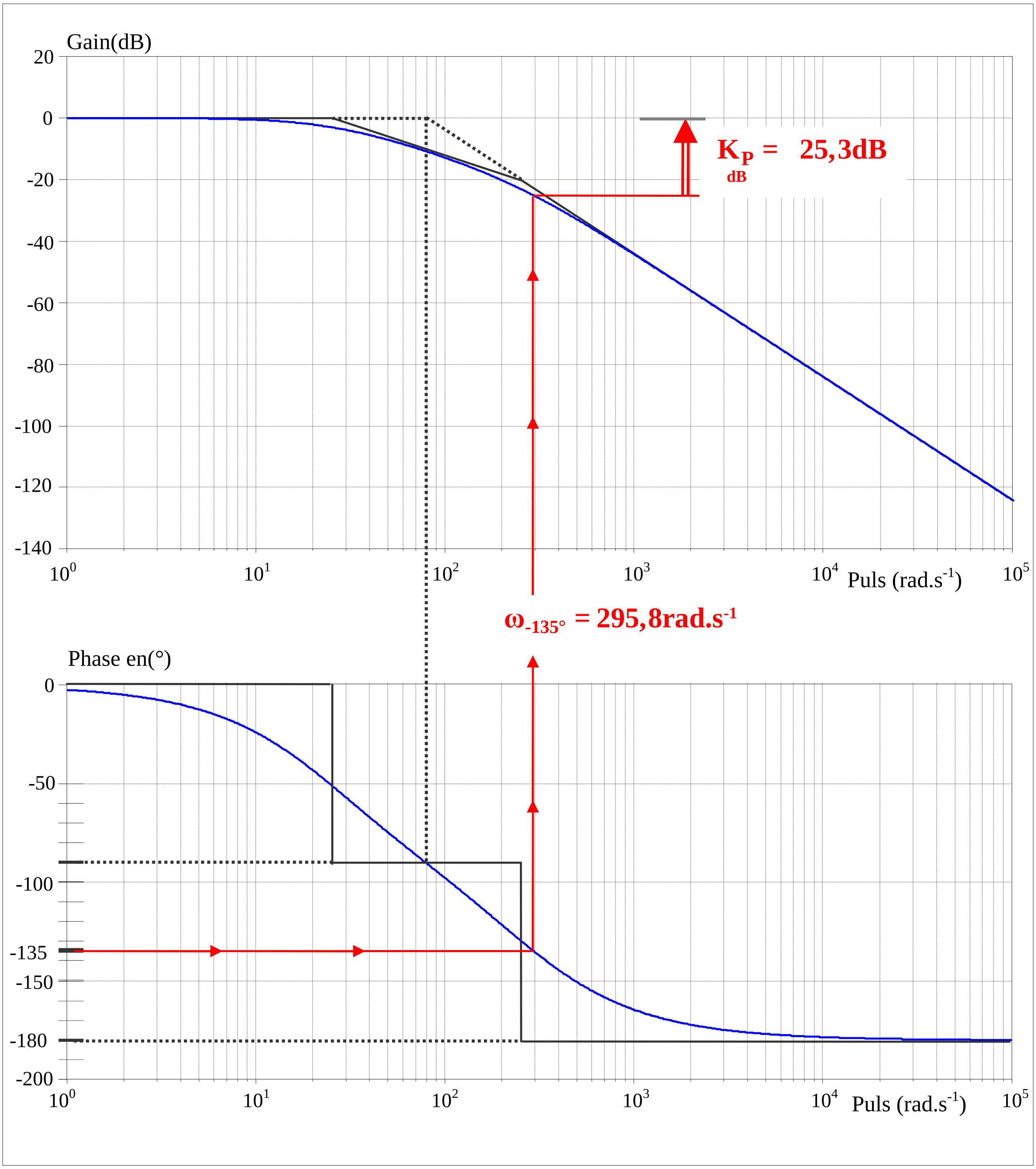
Puis, on effectue la somme des tracés des gains en dB et la somme des phases.

Tracé de la courbe $H_1(j\cdot\omega) = \dfrac{1}{\left(1+j\cdot\dfrac{\omega}{25}\right)\cdot\left(1+j\cdot\dfrac{\omega}{25}\right)}$

Gain : Affaiblissement de 3dB aux cassures.
Phase : on peut s'appuyer sur la droite voisine.

Pour d'autres points

$$\boxed{|H_1(j\cdot\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{25})^2}\cdot\sqrt{1+(\frac{\omega}{250})^2}}} \qquad \boxed{\varphi(j\cdot\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{25}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{250}\right)}$$



5- Correction proportionnelle : $C_1(p) = K_{P1}$. Déterminer le gain K_{P1} pour obtenir une marge de phase de 45°. (Cette valeur K_{P1} constitue un préréglage)

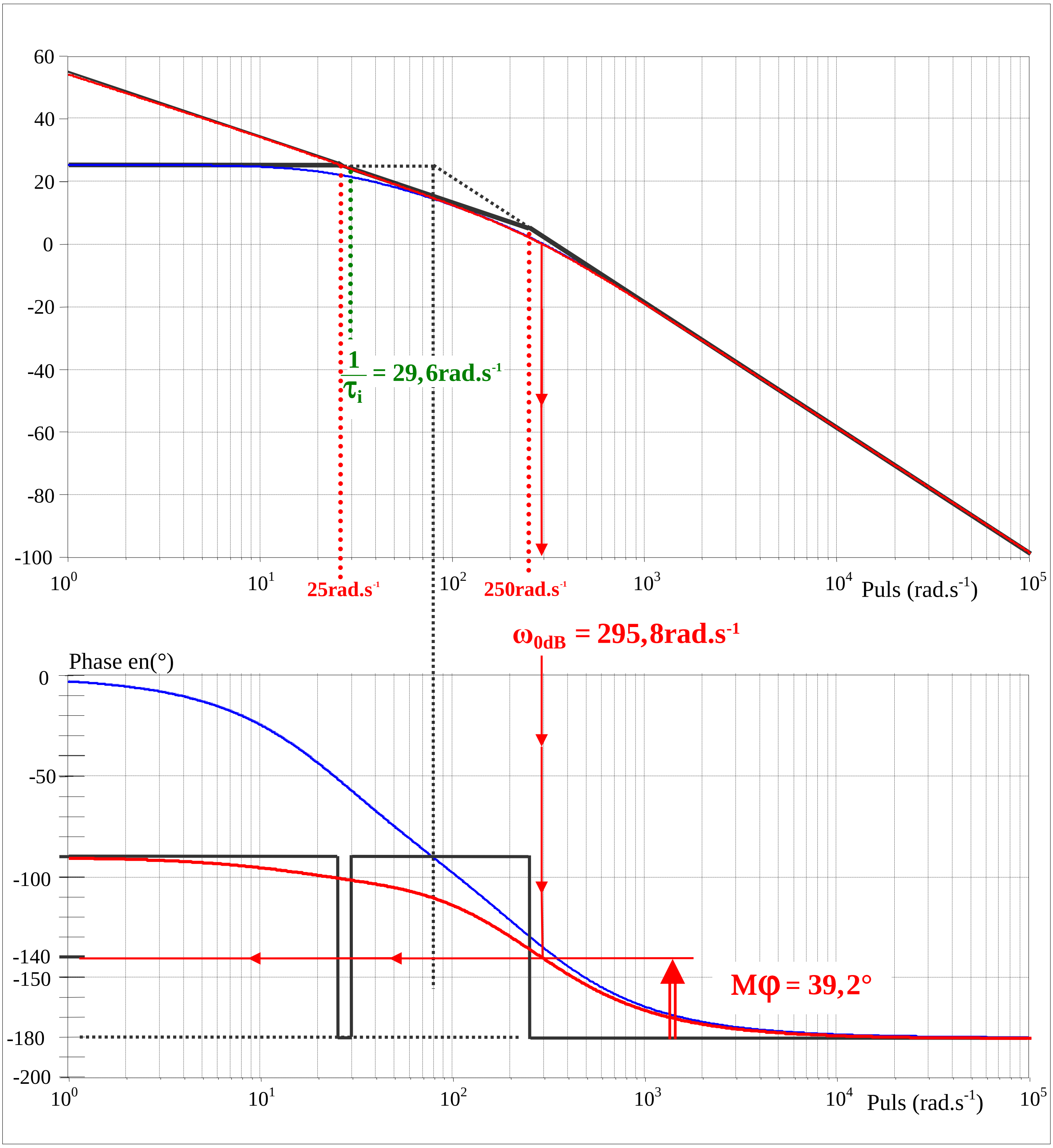
$$-\arctan\left(\frac{\omega}{25}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{250}\right) = -135° \Rightarrow \tan\left[\arctan\left(\frac{\omega}{25}\right) + \arctan\left(\frac{\omega}{250}\right)\right] = \tan 135°$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{\omega}{25}\right)+\left(\frac{\omega}{250}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{25}\right)\cdot\left(\frac{\omega}{250}\right)} = -1 \Rightarrow +1+\left(\frac{11\cdot\omega}{250}\right)-\left(\frac{\omega^2}{6250}\right) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\omega_{-135°} = 295{,}8\,rad.s^{-1}}$$

La fonction corrigée doit avoir un gain de 1 pour la pulsation $\omega = \omega_{-135°}$:

$$\Rightarrow \left|H_1(j\cdot\omega)\right| = \frac{K_P}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{25})^2}\cdot\sqrt{1+(\frac{\omega}{250})^2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_{P1} = 18{,}4} \text{ soit } \boxed{K_{P1\,dB} = 25{,}3\text{dB}}$$

6- Action intégrale : $C_2(p) = K_{P1}\cdot\frac{1+\tau_i p}{\tau_i p}$ On veut une erreur statique nulle. Régler le facteur intégral en déterminant τ_i.



On peut réaliser la mise en place du correcteur intégral en plaçant sa cassure une décade avant la valeur obtenue pour ω_{0dB} . On sait qu'on perdra 5° de marge de phase.

Ceci conduit à écrire : $\frac{1}{\tau_i} = \frac{\omega_{0dB}}{10} = 29{,}6\text{rad.s}^{-1} \Rightarrow \boxed{\tau_i = 0{,}033\text{s}}$

On peut vérifier que le correcteur a un gain proche de 0dB au voisinage de $\omega = 295{,}8\text{rad.s}^{-1}$

$$\left|\frac{1+\tau_i \cdot j\omega}{\tau_i \cdot j\omega}\right| = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{296}{29{,}6}\right)^2}}{\frac{296}{29{,}6}} = \frac{\sqrt{1+(10)^2}}{10} = 1{,}005 \approx 1 \ \boxed{\text{soit } 0\text{dB}}$$

On peut donc considérer que la pulsation $\omega_{0dB} = 296\text{rad.s}^{-1}$ est conservée.

Vérifions la marge de phase :

$$\varphi(\omega_{0dB}) = \underbrace{-90° + \arctan(0{,}033\times\omega)}_{-5{,}8°} \underbrace{-\arctan\left(\frac{\omega}{25}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{250}\right)}_{-135°} = -140{,}8°$$

On en déduit la marge de phase $\boxed{M\varphi = 180° - 140{,}8° = 39{,}2°}$

7- Action dérivée : $C(p) = K_{P3} \cdot \frac{1+\tau_i p}{\tau_i p} \cdot \frac{1+\tau_d p}{1+a\tau_d p}$

Le système est maintenant précis et stable, mais pas assez rapide. On veut qu'il réagisse le plus rapidement possible à un échelon de tension de consigne de 0,1V, tout en respectant la limite d'intensité.

7-1 Déterminer la valeur de l'échelon de tension maxi à l'entrée du moteur pour ne pas dépasser le courant maxi. (On assimile le moteur à une résistance pure.)

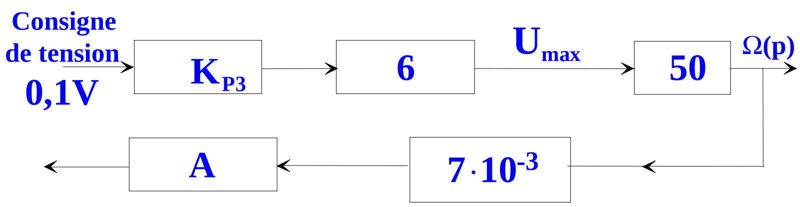
Au démarrage on applique en entrée une tension de 0,1V

Le courant maximal est de $I_{max} = 10 \cdot I_n = 10\times 6\text{A} = 60\text{A}$

La tension maxi à l'entrée du moteur sera $U_{max} = R \cdot I_{max} = 0{,}5\Omega\times 60\text{A} = 30\text{ V}$

7-2 En déduire la valeur de K_{P3} ; (On déstabilise alors le système).

Le schéma devient :



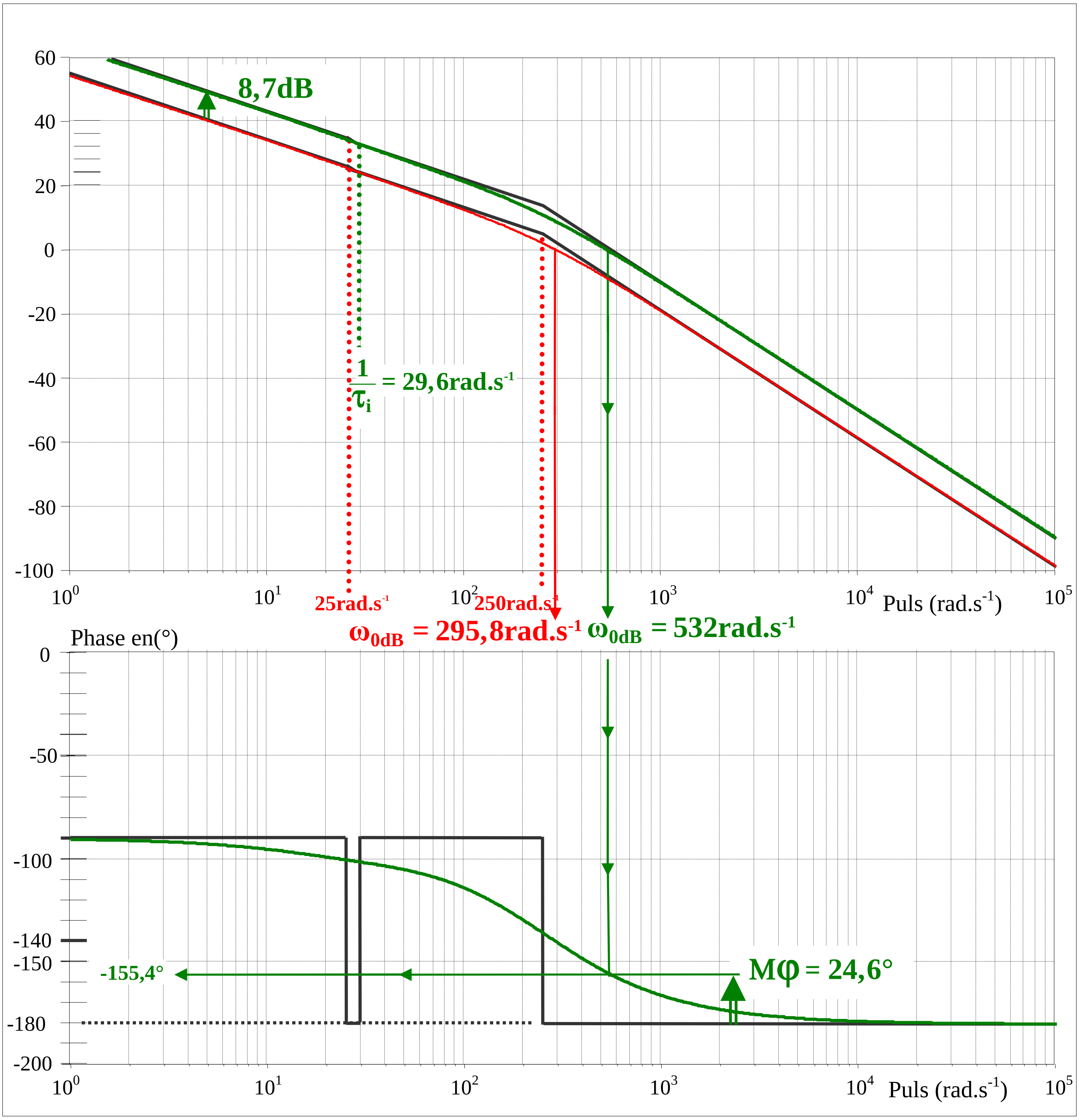
d'où $U_{max} = 30\text{V} = 0{,}1\times K_{P3}\times 6 \Rightarrow \boxed{K_{P3} = \frac{30\text{V}}{0{,}1\times 6} = 50} \Rightarrow \boxed{K_{P3\,dB} = 34\text{dB}}$

Le correcteur proportionnel actuel est $K_{P3} = 50$, l'ancien était $K_{P1} = 18{,}4$

Il faut donc multiplier le gain du réglage n°2 par $\frac{K_{P3}}{K_{P1}} = \frac{50}{18,4} = 2,71$

Ce qui revient à monter la courbe de **8,7 dB**

<u>N.B.</u> On retrouve ce résultat en faisant $K_{P3_{dB}} - K_{P1_{dB}} = 34 - 25,3 = 8,7dB$



7-3 Régler le facteur dérivé (déterminer a et τ_d) pour retrouver la marge de phase de 45°.

<u>On recherche la nouvelle marge de phase</u> :

D'abord ω_{0dB} en résolvant : $\left|H_1(j\cdot\omega)\right| = 1$

$$|H_1(j\cdot\omega)| = 50\cdot\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{29,6}\right)^2}}{\frac{\omega}{29,6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{25}\right)^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{250}\right)^2}} = 1 \qquad \Rightarrow \quad \omega_{0dB} = 532\text{rad.s}^{-1}$$

Puis on calcule la phase correspondante :

$$\varphi(\omega_{0dB}) = -90° + \arctan(0,033\times\omega) - \arctan\left(\frac{\omega}{25}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{250}\right) = -155,4°$$

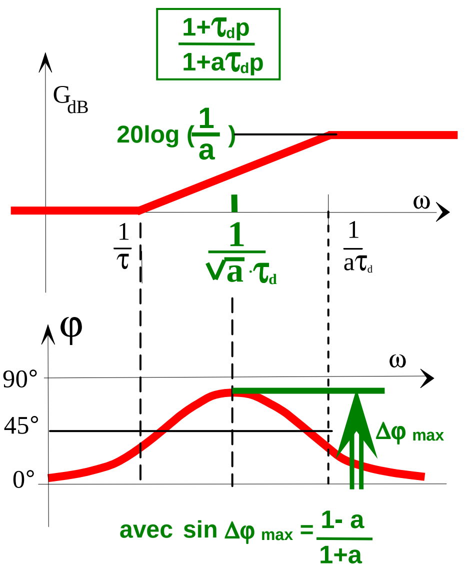
Enfin on en déduit la marge de marge de phase :

$$M\varphi = 180° + \varphi(\omega_{0dB}) = 180° - 155,4° \ ? \Rightarrow \boxed{M\varphi = 24,6}$$

On vise une marge de 52° en considérant qu'on perdra environ 7° du fait de la modification du gain et par conséquent de la valeur de ω_{0dB}.

On doit réaliser un correcteur qui permet de gagner en marge : $\Delta\varphi = 27,4°$

La forme $\frac{1+\tau_d p}{1+a\tau_d p}$ impose $a < 1$



La relation $\sin(\Delta\varphi) = \frac{1-a}{1+a}$ permet de déterminer a.

$$a = \frac{1-\sin(\Delta\varphi)}{1+\sin(\Delta\varphi)} = \frac{1-\sin(27,4°)}{1+\sin(27,4°)} = 0,37$$

La relation $\omega_{0dB} = \frac{1}{\sqrt{a}\cdot\tau_d}$ permet de placer le correcteur.

$$\tau_d = \frac{1}{\omega_{0dB}\cdot\sqrt{a}} = \frac{1}{532\cdot\sqrt{0,37}} = 3,1\cdot10^{-3}\text{s}$$

Le correcteur s'écrit alors

$$\boxed{H_3(p) = 50\cdot\frac{1+3,3\cdot10^{-2}p}{3,3\cdot10^{-2}p}\cdot\frac{1+3,1\cdot10^{-3}p}{1+1,1\cdot10^{-3}p}}$$

Vérification de la nouvelle marge :

$$|H_1(j\cdot\omega)| = 50\cdot\frac{\sqrt{1+\left(3,3\cdot10^{-2}\cdot\omega\right)^2}}{3,3\cdot10^{-2}\cdot\omega}\cdot\frac{\sqrt{1+\left(3,1\cdot10^{-3}\cdot\omega\right)^2}}{\sqrt{1+\left(1,1\cdot10^{-3}\cdot\omega\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{25}\right)^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{250}\right)^2}} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{0dB} = 765\text{rad.s}^{-1}$$

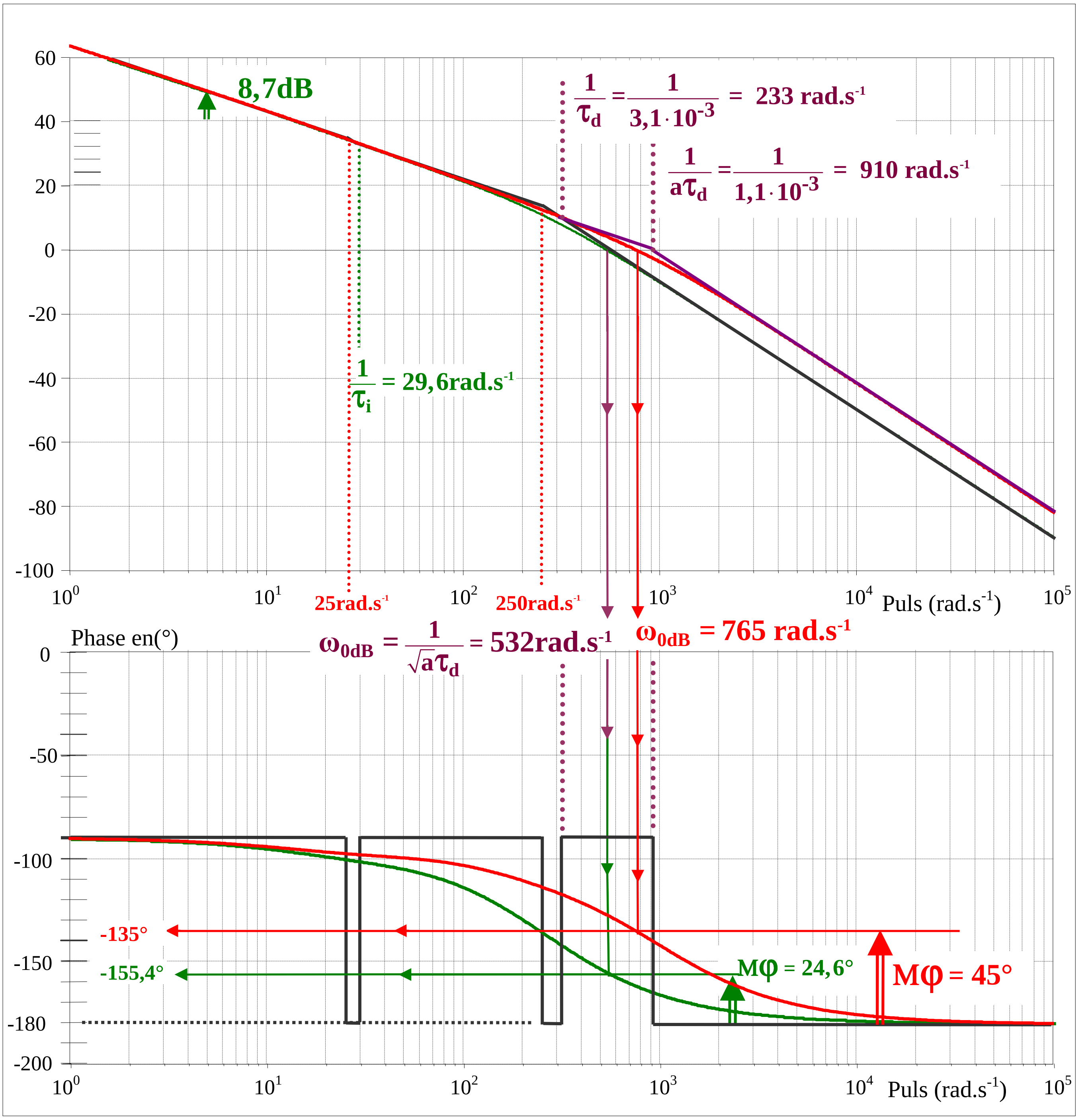
Puis on calcule la phase correspondante :

$$\varphi(\omega_{0dB}) = +\ \arctan(0{,}033\times\omega) - 90° + \arctan(0{,}0031\times\omega) - \arctan(0{,}0011\times\omega) - \arctan\left(\frac{\omega}{25}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{250}\right) = -135°$$

Enfin on en déduit la marge de marge de phase :

$$M\varphi = 180° + \varphi(\omega_{0dB}) = 180° - 135°\ ? \Rightarrow \boxed{M\varphi = 45°}$$

On note que la marge de gain est toujours infinie.



Conclusion :

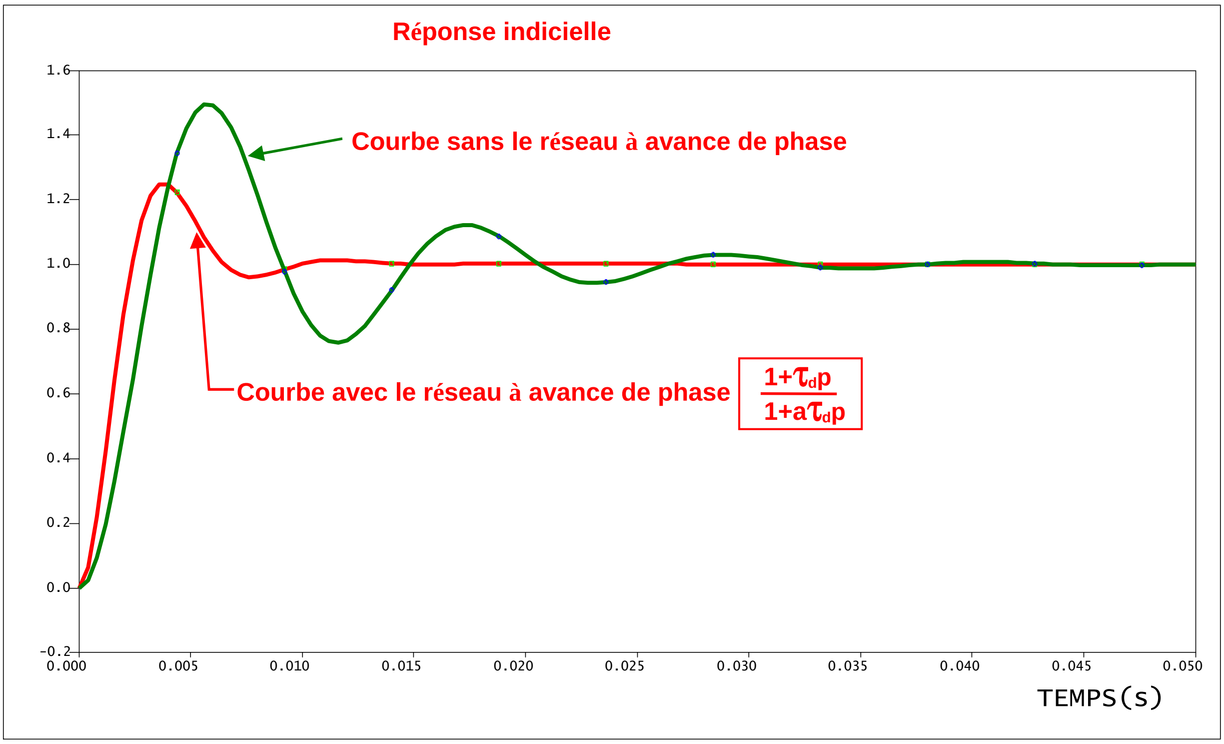
Le système est stable avec des marges qui respectent le cahier des charges **$M\varphi = 45°$**

$MG \rightarrow \infty$

Le système est précis en régulation **$\varepsilon_S = 0$**

Le système est rapide (il utilise au maximum les possibilités du matériel)

$BP_{-3dB\,BF} \approx 765\ rad \cdot s^{-1}$



Conclusion sur l'effet du correcteur réseau à avance de phase.

Le système est stable avec un dépassement D1% de l'ordre de 22% au lieu de 50% sans le réseau.

Le système est aussi précis en régulation **$\varepsilon_S = 0$**

Le système est un peu plus rapide avec le réseau puisque le temps de montée est plus faible (pente à l'origine plus élevée avec le réseau)