

**Exercice 25 ASSERVISSEMENT DE VITESSE**  
**CORRECTION AVEC UN P.I.D.**



1-Déterminer K

$$K = \frac{3 \cdot 10^3 \text{ t} \cdot \text{min}^{-1}}{60 \text{ V}} \Rightarrow K = 50 \text{ t} \cdot \text{min}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$$

$$\text{Correcteur : } C(p) = K_p \cdot \frac{1+\tau_i p}{\tau_i p} \cdot \frac{1+\tau_d p}{1+a\tau_d p}$$

2- Déterminer les transmittances G, T, et A, avec C(p) = 1, sachant que le gain en boucle ouverte est égal à 1.

$$T = 7 \text{ mV} \cdot \text{t}^{-1} \cdot \text{min} = 7 \cdot 10^{-3} \text{ V} \cdot \text{t}^{-1} \cdot \text{min}$$

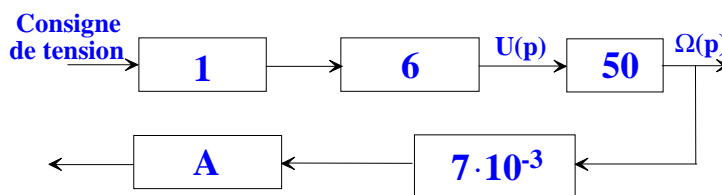


Schéma bloc statique boucle ouverte

Le gain en boucle ouverte étant égal à 1,

$$1 \times 6 \times 50 \times 7 \cdot 10^{-3} \times A = 1 \Rightarrow A = \frac{10^3}{6 \times 50 \times 7} \Rightarrow A = 0,476$$

3- En déduire  $H_1(p)$  en boucle ouverte

On a choisi A pour avoir un gain en B.O. égal à 1  $\Rightarrow H_1(p) = \frac{1}{(0,004p + 1) \cdot (0,04p + 1)}$

4- Tracer les courbes de Bode de  $H_1(p)$ .

$H_1(p)$  est factorisée sous la forme d'un produit de deux fonctions

**Diagramme asymptotique :**

$$H_{1a}(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{25}}$$

cassure à  $\omega = 25 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  une **pente nulle** avant la cassure et une pente à **-20 dB/ décade** après la cassure.  
 Avec une phase à  $0^\circ$  avant la cassure et à  $-90^\circ$  après la cassure

$$H_{1b}(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{250}}$$

cassure à  $\omega = 250 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  une **pente nulle** avant la cassure et une pente à **-20 dB/ décade** après la cassure.  
 Avec une phase à  $0^\circ$  avant la cassure et à  $-90^\circ$  après la cassure

Puis, on effectue la somme des tracés des gains en dB et la somme des phases.

**Tracé de la courbe**  $H_1(j \cdot \omega) = \frac{1}{\left(1 + j \cdot \frac{\omega}{25}\right) \cdot \left(1 + j \cdot \frac{\omega}{250}\right)}$

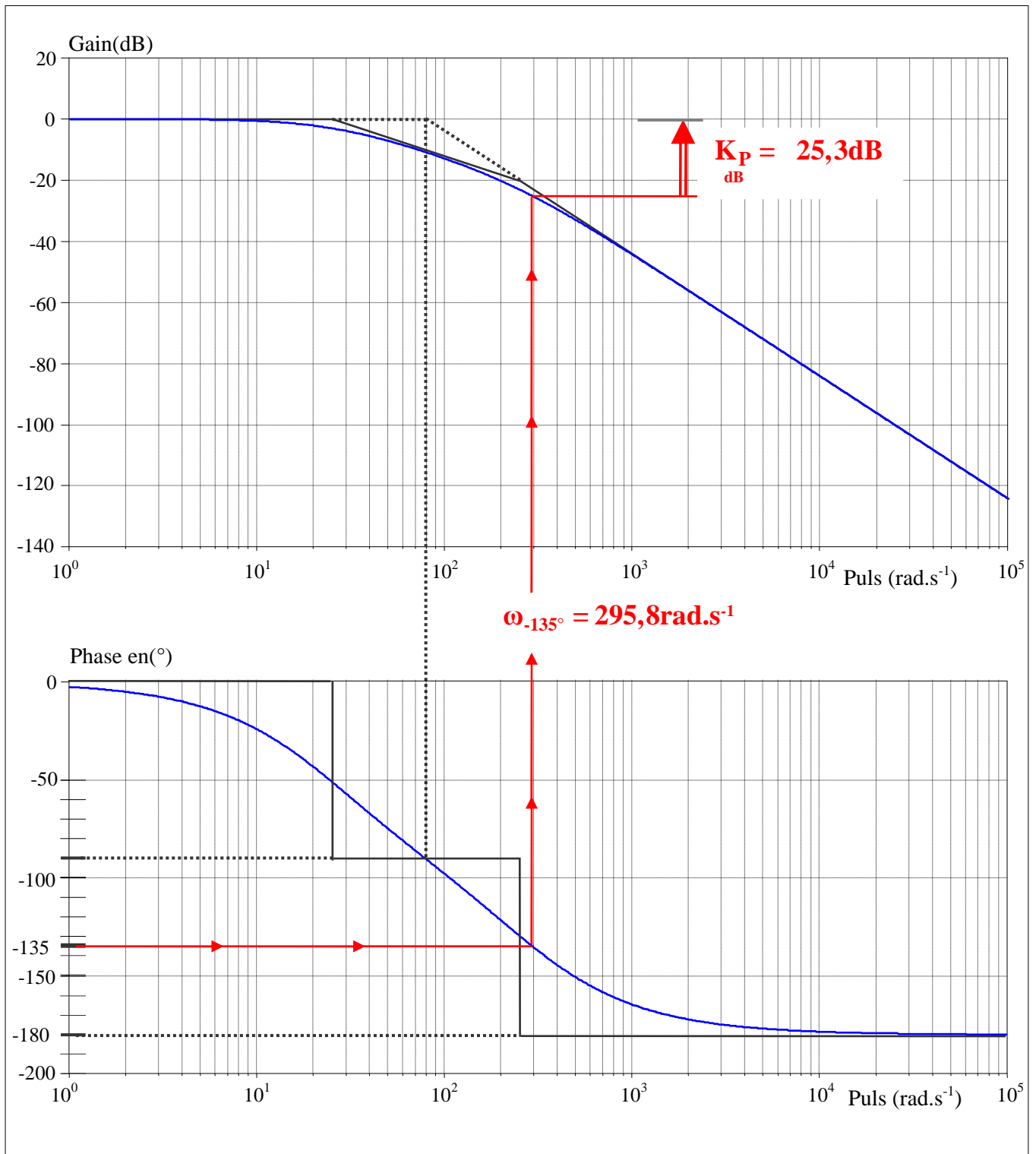
**Gain** : Affaiblissement de 3dB aux cassures.

**Phase** : on peut s'appuyer sur la droite voisine.

Pour d'autres points

$$|H_1(j \cdot \omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{25}\right)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{250}\right)^2}}$$

$$\Phi(j \cdot \omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{25}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{250}\right)$$



5- Correction proportionnelle :  $C_1(p) = K_{P1}$ . Déterminer le gain  $K_{P1}$  pour obtenir une marge de phase de  $45^\circ$ . (Cette valeur  $K_{P1}$  constitue un pré réglage)

$$- \arctan\left(\frac{\omega}{25}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{250}\right) = -135^\circ \Rightarrow \tan\left[\arctan\left(\frac{\omega}{25}\right) + \arctan\left(\frac{\omega}{250}\right)\right] = \tan 135^\circ$$

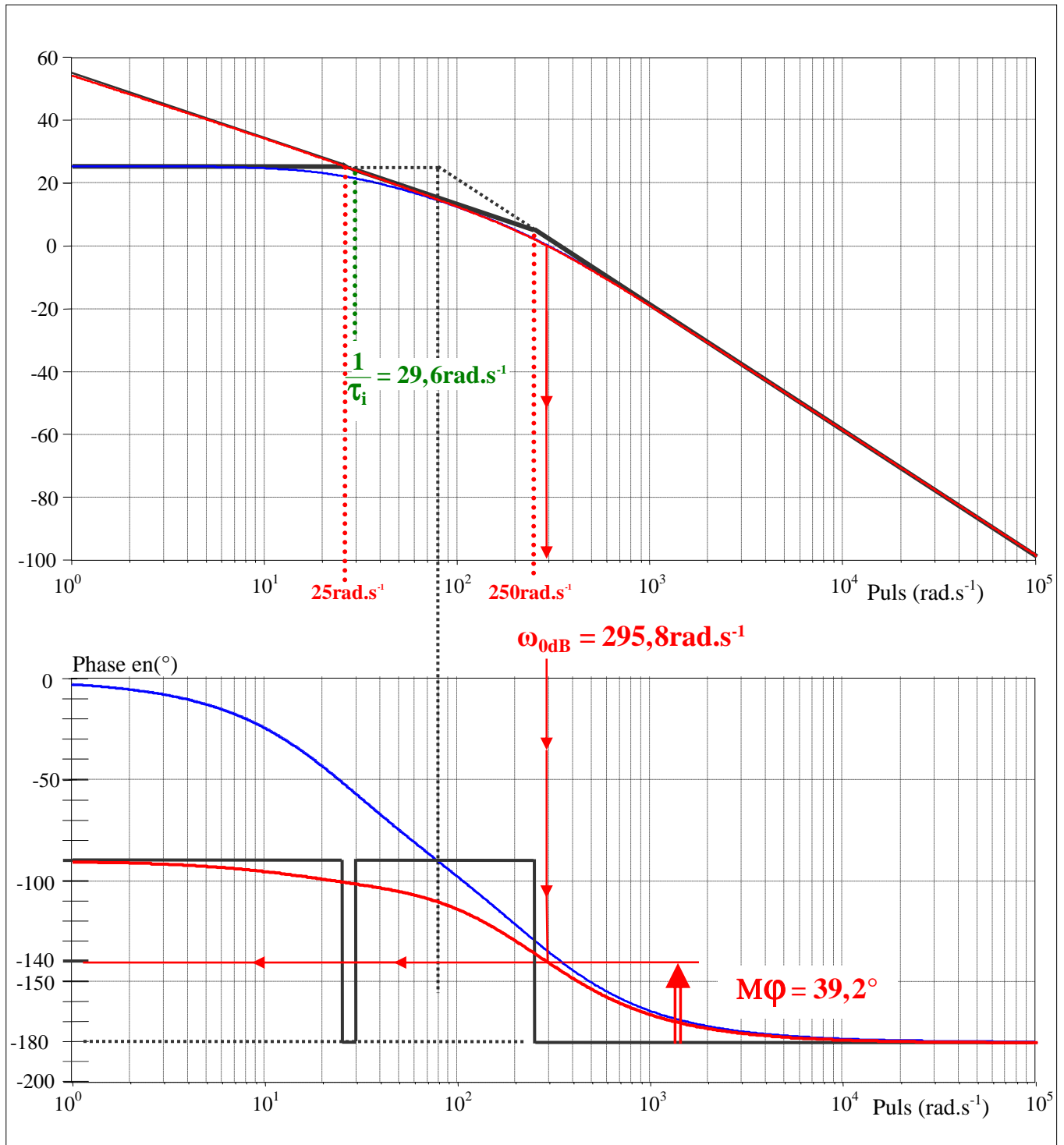
$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{\omega}{25}\right) + \left(\frac{\omega}{250}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{25}\right) \cdot \left(\frac{\omega}{250}\right)} = -1 \Rightarrow +1 + \left(\frac{11 \cdot \omega}{250}\right) - \left(\frac{\omega^2}{6250}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_{-135^\circ} = 295,8 \text{ rad.s}^{-1}}$$

La fonction corrigée doit avoir un gain de 1 pour la pulsation  $\omega = \omega_{.135^\circ}$  :

$$\Rightarrow |H_1(j\omega)| = \frac{K_p}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{25})^2} \cdot \sqrt{1 + (\frac{\omega}{250})^2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_{P1} = 18,4} \quad \text{soit} \quad \boxed{K_{P1} = 25,3\text{dB}}_{dB}$$

6- Action intégrale :  $C_2(p) = K_{P1} \cdot \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p}$

On veut une erreur statique nulle. Régler le facteur intégral en déterminant  $\tau_i$ .



On peut réaliser la mise en place du correcteur intégral en plaçant sa cassure une décade avant la valeur obtenue pour  $\omega_{0dB}$ . On sait qu'on perdra  $5^\circ$  de marge de phase.

Ceci conduit à écrire :  $\frac{1}{\tau_i} = \frac{\omega_{0dB}}{10} = 29,6 \text{rad.s}^{-1} \Rightarrow \tau_i = 0,033\text{s}$

On peut vérifier que le correcteur a un gain proche de 0dB au voisinage de  $\omega = 295,8 \text{rad.s}^{-1}$

$$\left| \frac{1 + \tau_i \cdot j\omega}{\tau_i \cdot j\omega} \right| = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{296}{29,6}\right)^2}}{\frac{296}{29,6}} = \frac{\sqrt{1 + (10)^2}}{10} = 1,005 \approx 1 \text{ soit } 0\text{dB}$$

On peut donc considérer que la pulsation  $\omega_{0dB} = 296 \text{rad.s}^{-1}$  est conservée.

Vérifions la marge de phase :

$$\varphi(\omega_{0dB}) = \underbrace{-90^\circ + \arctan(0,033 \times \omega)}_{-5,8^\circ} - \underbrace{\arctan\left(\frac{\omega}{25}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{250}\right)}_{-135^\circ} = -140,8^\circ$$

On en déduit la marge de phase  $M\varphi = 180^\circ - 140,8^\circ = 39,2^\circ$

7- Action dérivée :  $C(p) = K_{P3} \cdot \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p} \cdot \frac{1 + \tau_d p}{1 + a\tau_d p}$

Le système est maintenant précis et stable, mais pas assez rapide. On veut qu'il réagisse le plus rapidement possible à un échelon de tension de consigne de 0,1V, tout en respectant la limite d'intensité.

7-1 Déterminer la valeur de l'échelon de tension maxi à l'entrée du moteur pour ne pas dépasser le courant maxi. (On assimile le moteur à une résistance pure.)

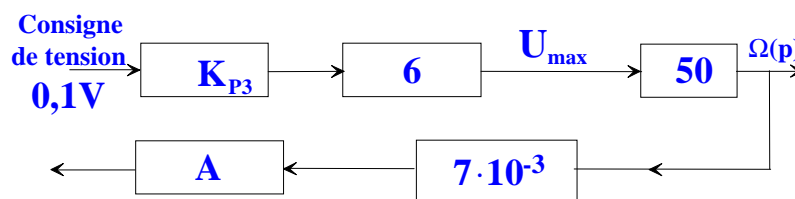
Au démarrage on applique en entrée une tension de 0,1V

Le courant maximal est de  $I_{max} = 10 \cdot I_n = 10 \times 6\text{A} = 60\text{A}$

La tension maxi à l'entrée du moteur sera  $U_{max} = R \cdot I_{max} = 0,5\Omega \times 60\text{A} = 30\text{V}$

7-2 En déduire la valeur de  $K_{P3}$  ; (On déstabilise alors le système).

Le schéma devient :



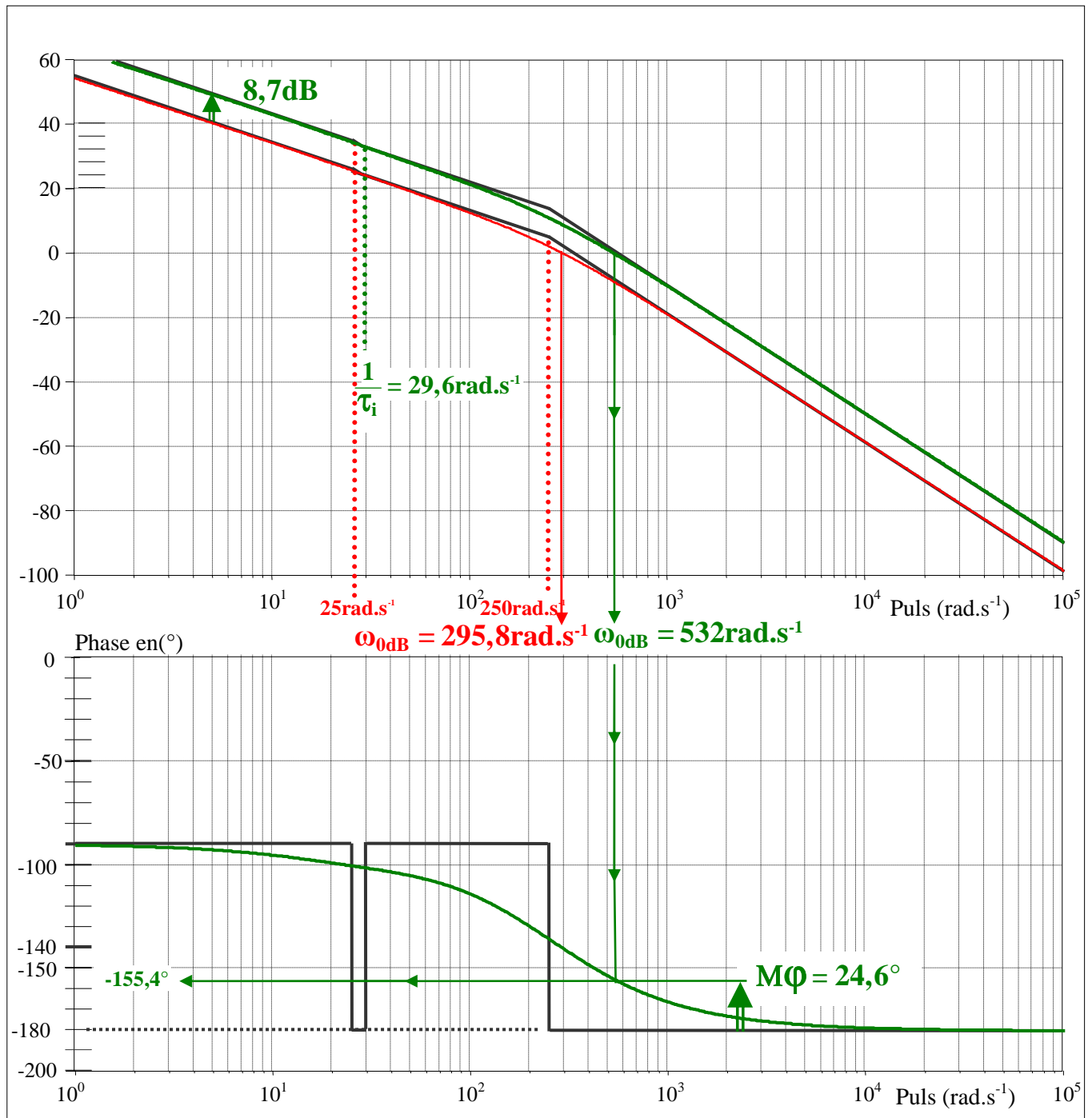
d'où  $U_{max} = 30\text{V} = 0,1 \times K_{P3} \times 6 \Rightarrow K_{P3} = \frac{30\text{V}}{0,1 \times 6} = 50 \Rightarrow K_{P3} = 34\text{dB}$

Le correcteur proportionnel actuel est  $K_{P3} = 50$ , l'ancien était  $K_{P1} = 18,4$

Il faut donc multiplier le gain du réglage n°2 par  $\frac{K_{P3}}{K_{P1}} = \frac{50}{18,4} = 2,71$

Ce qui revient à monter la courbe de **8,7 dB**

N.B. On retrouve ce résultat en faisant  $K_{P3} - K_{P1} = 34 - 25,3 = 8,7\text{dB}$



7-3 Régler le facteur dérivé (déterminer a et  $\tau_d$ ) pour retrouver la marge de phase de  $45^\circ$ .

On recherche la nouvelle marge de phase :

D'abord  $\omega_{0dB}$  en résolvant :  $|H_1(j\omega)| = 1$

$$|H_1(j\omega)| = 50 \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{29,6}\right)^2}}{\frac{\omega}{29,6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{25}\right)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{250}\right)^2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_{0dB} = 532 \text{ rad.s}^{-1}$$

Puis on calcule la phase correspondante :

$$\varphi(\omega_{0dB}) = -90^\circ + \arctan(0,033 \times \omega) - \arctan\left(\frac{\omega}{25}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{250}\right) = -155,4^\circ$$

Enfin on en déduit la marge de phase :

$$M\varphi = 180^\circ + \varphi(\omega_{0dB}) = 180^\circ - 155,4^\circ \Rightarrow \boxed{M\varphi = 24,6}$$

On vise une marge de  $52^\circ$  en considérant qu'on perdra environ  $7^\circ$  du fait de la modification du gain et par conséquent de la valeur de  $\omega_{0dB}$ .

On doit réaliser un correcteur qui permet de gagner en marge :  $\Delta\varphi = 27,4^\circ$

La forme  $\frac{1+\tau_d p}{1+a\tau_d p}$  impose  $a < 1$

La relation  $\sin(\Delta\varphi) = \frac{1-a}{1+a}$  permet de déterminer  $a$ .

$$a = \frac{1 - \sin(\Delta\varphi)}{1 + \sin(\Delta\varphi)} = \frac{1 - \sin(27,4^\circ)}{1 + \sin(27,4^\circ)} = 0,37$$

La relation  $\omega_{0dB} = \frac{1}{\sqrt{a} \cdot \tau_d}$  permet de placer le correcteur.

$$\tau_d = \frac{1}{\omega_{0dB} \cdot \sqrt{a}} = \frac{1}{532 \cdot \sqrt{0,37}} = 3,1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

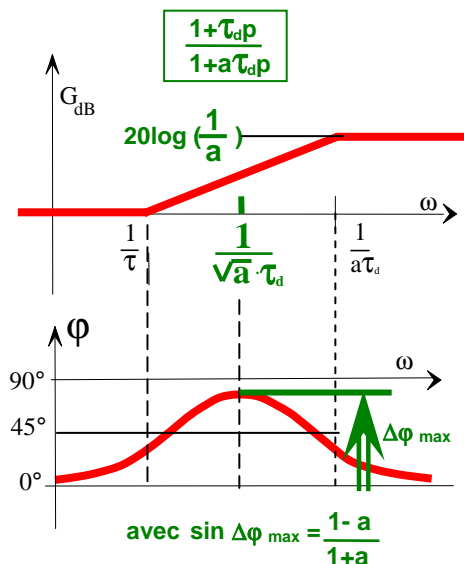
Le correcteur s'écrit alors

$$\boxed{H_3(p) = 50 \cdot \frac{1 + 3,3 \cdot 10^{-2} p}{3,3 \cdot 10^{-2} p} \cdot \frac{1 + 3,1 \cdot 10^{-3} p}{1 + 1,1 \cdot 10^{-3} p}}$$

Vérification de la nouvelle marge :

$$|H_1(j\omega)| = 50 \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(3,3 \cdot 10^{-2} \cdot \omega\right)^2}}{3,3 \cdot 10^{-2} \cdot \omega} \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(3,1 \cdot 10^{-3} \cdot \omega\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(1,1 \cdot 10^{-3} \cdot \omega\right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{25}\right)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{250}\right)^2}} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{0dB} = 765 \text{ rad.s}^{-1}$$



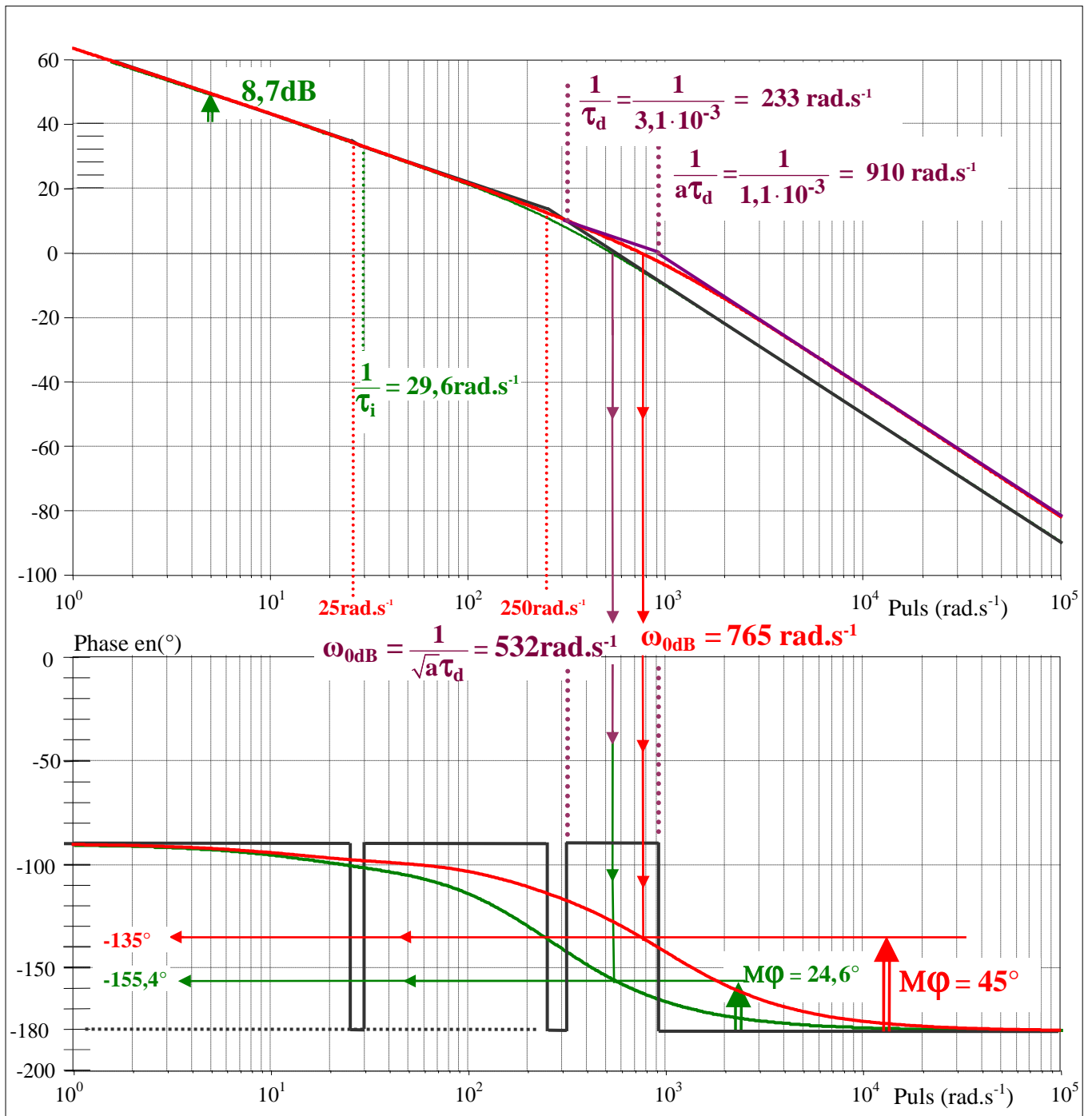
Puis on calcule la phase correspondante :

$$\Phi(\omega_{0dB}) = + \arctan(0,033 \times \omega) - 90^\circ + \arctan(0,0031 \times \omega) - \arctan(0,0011 \times \omega) - \arctan\left(\frac{\omega}{25}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{250}\right) = -135^\circ$$

Enfin on en déduit la marge de marge de phase :

$$M\Phi = 180^\circ + \Phi(\omega_{0dB}) = 180^\circ - 135^\circ \Rightarrow M\Phi = 45^\circ$$

On note que la marge de gain est toujours infinie.



Conclusion :

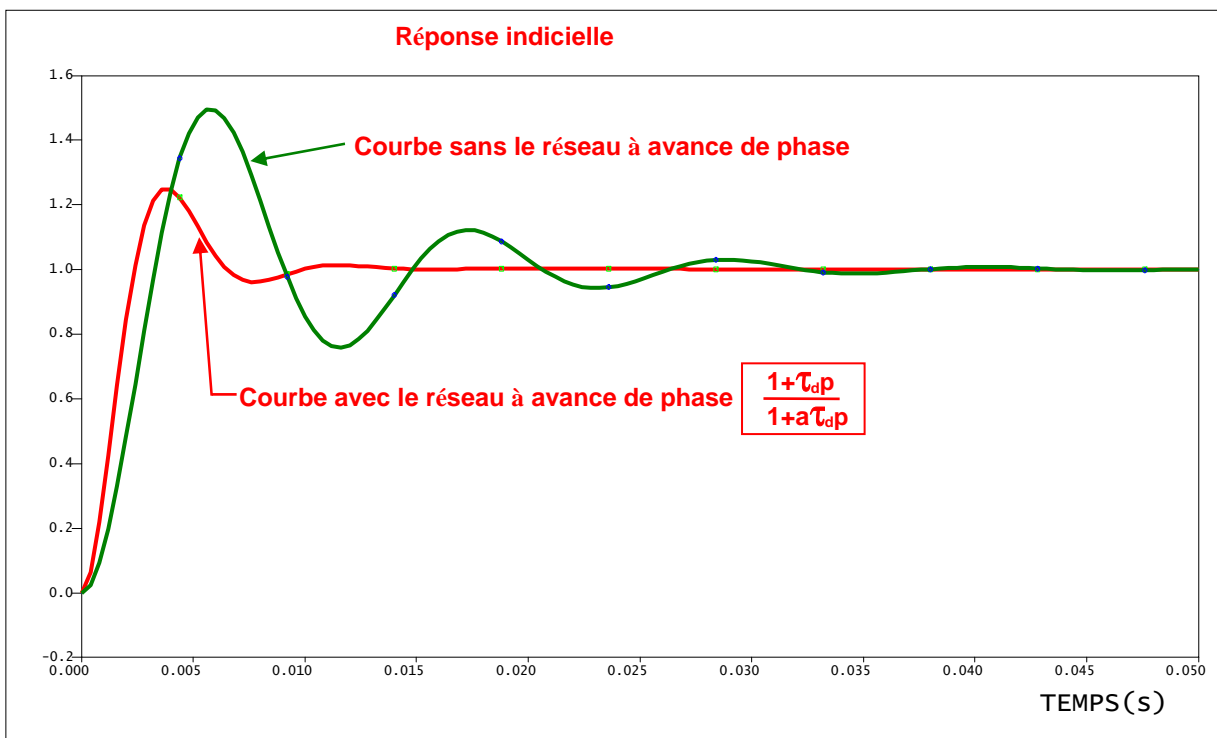
Le système est stable avec des marges qui respectent le cahier des charges  $M\phi = 45^\circ$

$MG \rightarrow \infty$

Le système est précis en régulation  $\mathcal{E}_s = 0$

Le système est rapide (il utilise au maximum les possibilités du matériel)

$BP_{-3dB BF} \approx 765 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$



Conclusion sur l'effet du correcteur réseau à avance de phase.

Le système est stable avec un dépassement  $D1\%$  de l'ordre de 22% au lieu de 50% sans le réseau.

Le système est aussi précis en régulation  $\mathcal{E}_s = 0$

Le système est un peu plus rapide avec le réseau puisque le temps de montée est plus faible (pente à l'origine plus élevée avec le réseau)