

III RAPIDITE

Contenu

III RAPIDITE	1
1 Définitions – Rapidité en temporel.....	2
1.1 Définitions.....	2
1.2 Cas des systèmes du 1 ^{er} ordre.....	2
1.3 Cas des système du 2 nd ordre.....	3
1.3.1 L’abaque des temps de réponse réduit.....	3
1.3.2 Equation de la droite approchée.....	3
2 Etude de la rapidité en régime harmonique.....	3
2.1 Influence de la bande passante de la FTBF.....	3
2.2 Approximation de la bande passante à partir de la FTBO.....	4
3 Influence des pôles dominants de la FTBF.....	5
4 Influence du bouclage.....	6
5 Exemple de la régulation de l’inclinaison du scooter UNO III.....	7

On quantifie les performances de stabilité, précision et rapidité d’un système asservi, on a vu qu’il fallait d’abord s’assurer de la stabilité selon l’évaluation de critères comme les marges de phase et de gain en régime harmonique, les dépassements pour la réponse indicielle...

Si le système asservi est suffisamment stable, on peut alors caractériser sa rapidité et la précision.

L’objectif de ce cours est de présenter les éléments intervenant sur la **rapidité des systèmes** ainsi que les outils permettant de l’évaluer (indépendamment des autres performances, dans mesure du possible).

1 Rapidité en temporel.

1.1 Définitions.

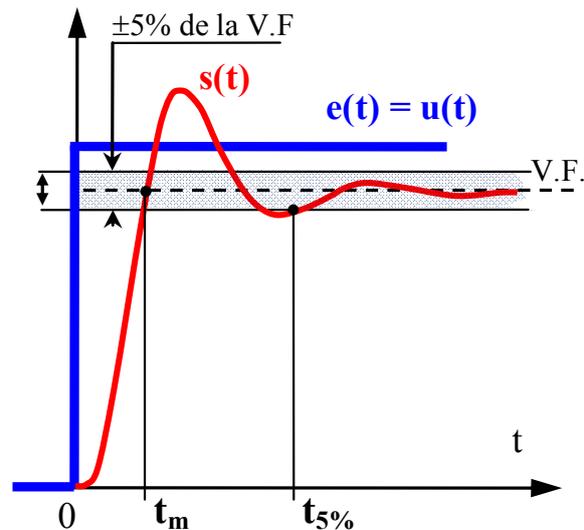
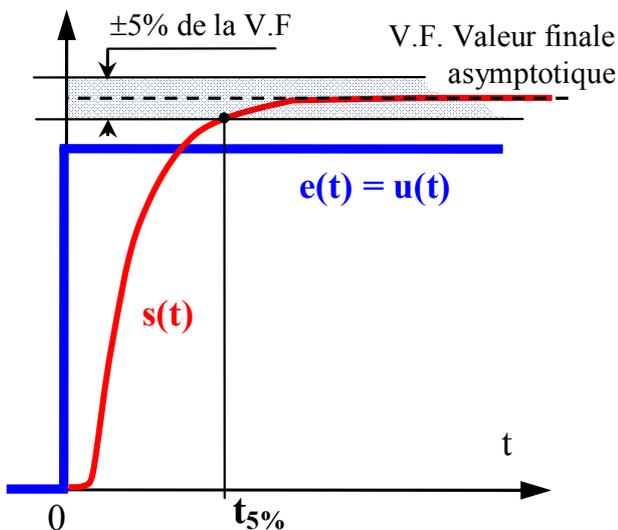
La rapidité s'intéresse au régime transitoire. Elle est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée (solicitation par un Dirac ou un échelon).

Cependant, la valeur finale étant le plus souvent atteinte de manière asymptotique, on retient alors comme principal critère d'évaluation de la rapidité d'un système, le temps de réponse à x%.



Dans la pratique, on adopte le **temps de réponse à 5% ($tr_{5\%}$)**.

On définit une bande de $\pm 5\%$ autour de la valeur finale. Le **$tr_{5\%}$** est le temps mis par le système pour que la valeur en sortie entre dans la bande $\pm 5\%$ pour ne plus en sortir.



Pour les systèmes oscillants le temps de réponse à 5% dépend aussi de la stabilité. En effet sur la courbe de droite, la véritable rapidité serait caractérisée par la pente pendant la phase de montée.



Temps de montée t_m . Lorsqu'on veut caractériser la rapidité indépendamment de la stabilité, on utilise le temps de montée t_m qui correspond à la durée au bout de laquelle la réponse passe pour la première fois par la valeur finale.

Plus le temps de réponse $tr_{5\%}$ et le temps de montée t_m sont faibles plus le système est rapide.

1.2 Cas des systèmes du 1^{er} ordre

Pour une entrée échelon unitaire $e(t)=u(t)$, la réponse temporelle a pour expression :

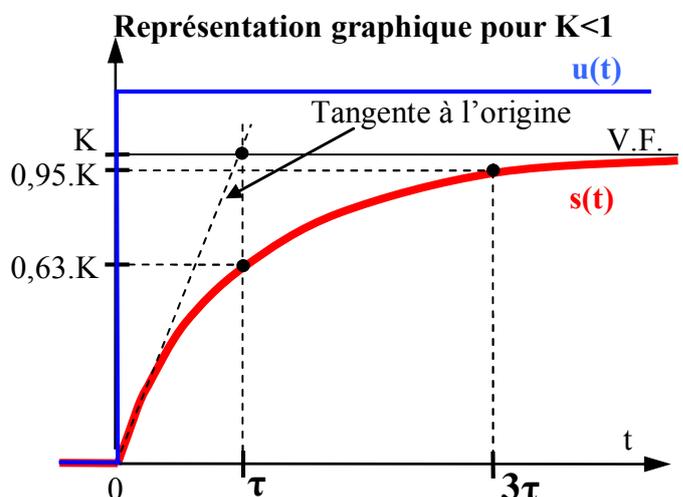
$$s(t) = K(1 - e^{-t/\tau}).u(t)$$

Pour $t = 3\tau$, $s(3 \cdot \tau) = K(1 - e^{-3}) = 0,95 \cdot K$

Le temps de réponse à 5%, $t_{5\%}$ correspond donc à 3 fois la constante de temps τ : $t_{5\%} = 3\tau$.



Plus la constante de temps est petite plus le système est rapide.



1.3 Cas des système du 2nd ordre

1.3.1 L'abaque des temps de réponse réduit

Dans le cas du système du 2nd ordre, il n'existe pas de formule simple pour calculer le temps de réponse à 5% car il dépend de la valeur du coefficient d'amortissement z et de la pulsation propre non amortie du système ω_0 .

On utilise l'abaque ci-contre qui donne la valeur du temps de réponse réduit $tr_{5\%} \cdot \omega_0$ en fonction du coefficient d'amortissement z ainsi que la valeur du temps de montée réduit $t_m \cdot \omega_0$ en fonction du coefficient d'amortissement z .

Valeur particulières:

➤ *Temps de réponse minimal sans dépassement autorisé $z > 1$.*

On lit sur la courbe $t_{5\%} \cdot \omega_0 = 5$

➤ *Critère de NASLIN :*

Si on accepte un *dépassement relatif de 5%*, le *temps de réponse minimal* est obtenu pour un coefficient d'amortissement de $z = 0,69 \approx 0,7$.

On lit sur la courbe $t_{5\%} \cdot \omega_0 = 3$

➤ pour $z \ll 1$ (amortissement faible), les oscillations sont mal amorties et le temps de réponse est grand.

1.3.2 Equation de la droite approchée

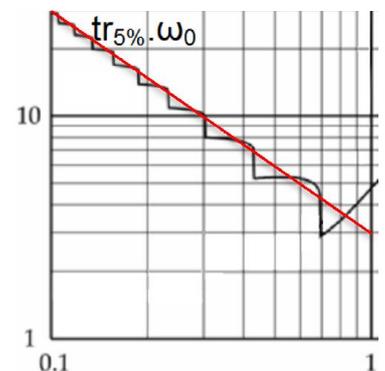
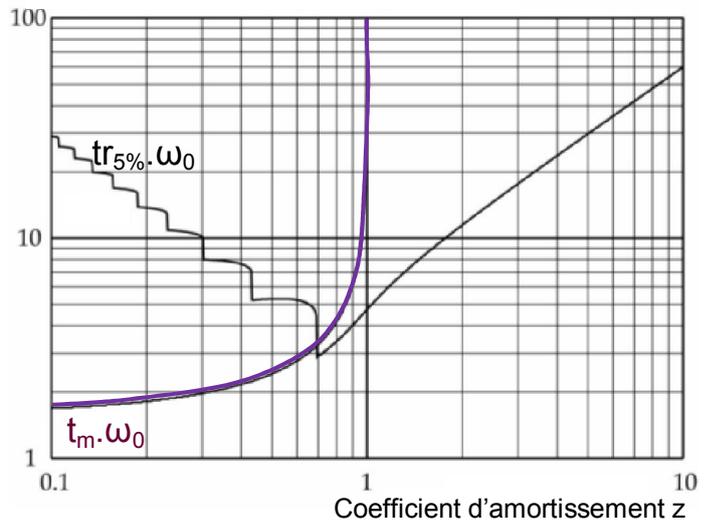
Pour $z < 0,7$ on peut approcher la courbe donnant $t_{5\%} \cdot \omega_0 = f(z)$ par une droite dans l'abaque ci-contre.

L'équation de cette droite aboutit à la relation suivante $t_{5\%} \cdot \omega_0 \approx \frac{3}{z}$

On voit les limites de cette approximation. Par exemple pour $z = 0,5$ on préfère retenir $t_{5\%} \cdot \omega_0 = 5$



Pour un même coefficient d'amortissement z , plus ω_0 augmente plus le temps de réponse à 5% diminue, donc plus le système est rapide.



2 Etude de la rapidité en régime harmonique

2.1 Influence de la bande passante de la FTBF

Lorsqu'un système est rapide, il a la capacité de suivre les variations brutales de la consigne d'entrée. La plus part des systèmes étudiés en SII se comportent comme des filtres passe-bas. Si on augmente la pulsation d'entrée, il existe une limite au-delà de laquelle la sortie voit son gain décroître.

Le critère retenu est la bande passante à -x dB. Elle correspond à la bande de pulsation où le gain est supérieur au gain statique moins -x dB



Dans la pratique, on adopte la **bande passante à -3dB**.
(affaiblissement du gain d'environ 30%)

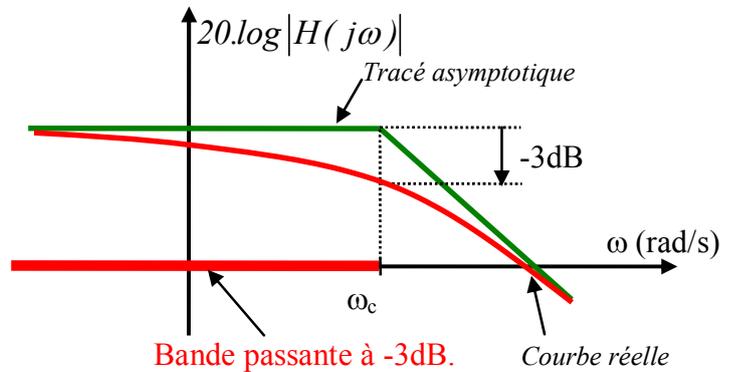


Cette recherche bande passante à -3dB doit être menée à partir de la **FTBF**.

Exemple :

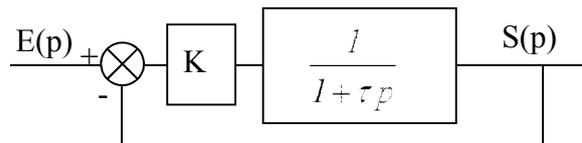
Pour le système dont la FTBF est du 1^{er} ordre défini sur la figure de droite, on a par exemple défini la bande passante à -3dB.

En électronique on appelle ce système filtre passe bas car la bande passante à -3dB se situe dans les zones de basse fréquence.



2.2 Approximation de la bande passante à partir de la FTBO.

1- Considérons un système avec une FTBO du 1^{er} ordre.



➤ Calculons sa bande passante à -3dB

$$\text{La FTBF s'exprime : } T(p) = \frac{K}{K+1+\tau \cdot p} = \frac{K}{K+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{\tau \cdot p}{K+1}}$$

On sait que pour un premier ordre, le gain s'affaiblit de -3dB à la cassure.

$$\text{C'est-à-dire pour } \omega_{-3dB \cdot BF} = \frac{K+1}{\tau} \Rightarrow \left[BP_{-3dB} = \left[0, \frac{K+1}{\tau} \right] \right] \text{ en rad.s}^{-1}$$

Approximation : On voit que si $K \gg 1$ alors $\omega_{-3dB \cdot BF} \approx \frac{K}{\tau}$

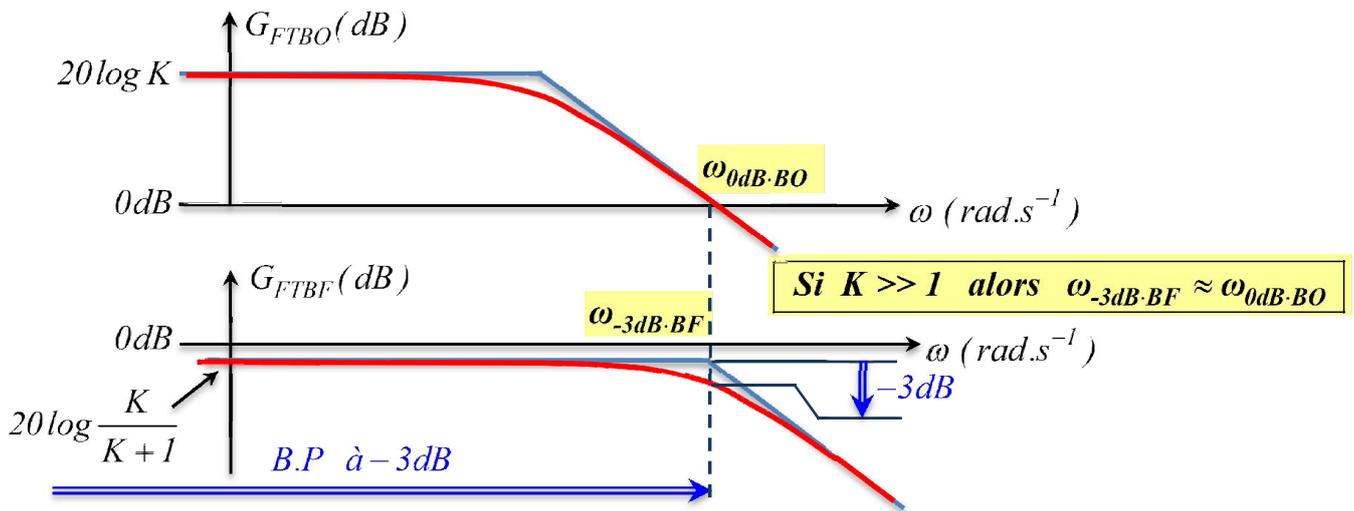
➤ Montrons qu'il existe une approximation à partir de la FTBO

Cherchons la valeur $\omega_{0dB \cdot BO}$ pour laquelle la FTBO a un gain de 0dB soit un module qui vaut 1.

$$T(p) = \left| \frac{K}{1+\tau \cdot p} \right| = \frac{K}{\sqrt{1+(\tau \cdot \omega)^2}} = 1$$

$$\text{Il alors faut résoudre } K^2 = 1+(\tau \cdot \omega)^2 \text{ soit } \omega_{0dB \cdot BO} = \frac{\sqrt{K^2-1}}{\tau}$$

Enfin, on voit que si $K \gg 1$ alors $\omega_{0dB \cdot BO} \approx \frac{K}{\tau}$



On peut avoir une approximation de la bande à -3dB pour un système du premier ordre en relevant la valeur $\omega_{0dB \cdot BO}$ de la FTBO.

Bien que l'approximation soit moins bonne pour le second ordre, on l'utilisera tout de même.

3 Influence des pôles dominants de la FTBF

On a vu lors de l'étude de la stabilité que les parties réelles des racines correspondaient en temporel à des constantes de temps que l'on retrouve dans des exponentielles.

La réponse $s(t)$ d'un SLCI dépend des pôles de sa fonction de transfert $H(p)$. L'écriture en pole de $H(p)$ donne :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot \dots \cdot (p - p_n)}$$

Avec $N(p)$: numérateur de $H(p)$, p_i : **pôles** de $H(p)$ et n : **ordre** de $H(p)$.

En sollicitant le système avec une impulsion de Dirac en entrée ($E(p) = 1$), la sortie $S(p)$ a pour expression

$$s(t) = \underbrace{A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t}}_{\text{Mode 1}} + \underbrace{A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}}_{\text{Mode 2}} + \dots + \underbrace{A_i \cdot e^{p_i \cdot t}}_{\text{Mode i}} + \dots + \underbrace{A_n \cdot e^{p_n \cdot t}}_{\text{Mode n}} = A_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + A_2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \dots + A_n \cdot e^{-\frac{t}{\tau_n}}$$

On constate ainsi que la réponse $s(t)$ du système correspond à une superposition de n modes qui dépendent des pôles de la FTBF.

On ne gardera que les constante de temps les plus grandes et donc les pôles les plus proches de l'axe des imaginaires.

On ne gardera que les constante de temps les plus grandes et donc les pôles les plus proches de l'axe des imaginaires.

Ce sont les pôles dominants.

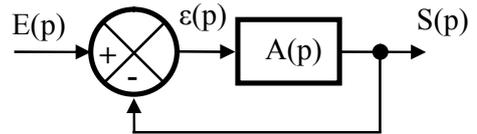


Facteur 10 mini sur la partie réelle des pôles

Par conséquent, lorsque l'on étudie un système, on peut se contenter de ne prendre en compte que les pôles dominants qui permettent d'obtenir un modèle mathématique plus simple à manipuler qui reflète les caractéristiques principales du système.

4 Influence du bouclage

Un système asservi peut toujours être mis sous la forme d'un système à retour unitaire si l'entrée $E(p)$ et la sortie $S(p)$ sont comparables (même dimension). L'avantage pratique du bouclage est qu'il permet de modifier facilement les caractéristiques du système.



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)} = \frac{FTBO}{1 + FTBO}$$

3.1. Bouclage d'un système du 1^{er} ordre

Dans le cas d'un système du 1^{er} ordre $A(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$. On a montré paragraphe 2.2 que la FTBF prenait

la forme : $H(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF} \cdot p}$ avec : $K_{BF} = \frac{K}{1 + K}$ et $\tau_{BF} = \frac{\tau}{1 + K}$



Le bouclage d'un système ayant une FTBO du 1^{er} ordre permet :

- de conserver l'ordre du système en obtenant une FTBF du 1^{er} ordre,
- **de diminuer la valeur de la constante de temps τ_{BF} du système, ce qui permet d'obtenir un temps de réponse plus faible lorsque l'on augmente le gain K de la FTBO.**

3.2. Bouclage d'un système du 2^{ème} ordre

Dans le cas d'un système du 2^{ème} ordre $A(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$. Après bouclage on obtient :

$$H(p) = \frac{FTBO}{1 + FTBO} = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2 + K} = \frac{\frac{K}{1 + K}}{1 + \frac{2 \cdot z}{(1 + K) \cdot \omega_0} p + \frac{1}{(1 + K) \cdot \omega_0^2} p^2} = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2 \cdot z_{BF}}{\omega_{BF0}} p + \frac{1}{\omega_{BF0}^2} p^2}$$

avec : $K_{BF} = \frac{K}{1 + K}$

$$\frac{1}{\omega_{BF0}^2} = \frac{1}{(1 + K) \cdot \omega_0^2} \rightarrow \omega_{BF0} = \sqrt{(1 + K) \cdot \omega_0}$$

$$\frac{2 \cdot z_{BF}}{\omega_{BF0}} = \frac{2 \cdot z}{(1 + K) \cdot \omega_0} \rightarrow z_{BF} = \frac{z \cdot \sqrt{(1 + K) \cdot \omega_0}}{(1 + K) \cdot \omega_0} \rightarrow z_{BF} = \frac{z}{\sqrt{(1 + K)}}$$



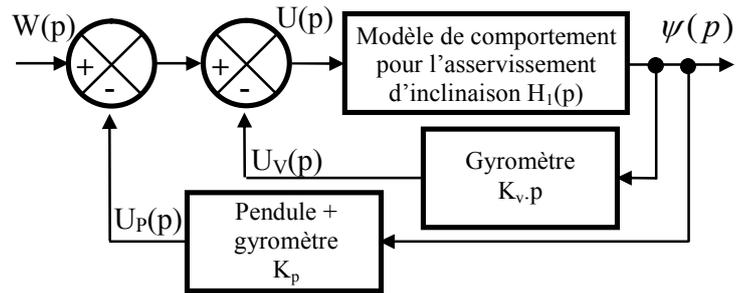
Le bouclage d'un système ayant une FTBO du 2^{ème} ordre :

- permet de conserver l'ordre du système en obtenant une FTBF du 2^{ème} ordre,
- **augmente la valeur de la pulsation propre du système lorsque l'on augmente le gain K de la FTBO, donc le système sera plus rapide.**
- **diminue la valeur du coefficient d'amortissement z_{BF} lorsque l'on augmente le gain K de la FTBO. Par conséquent :**
 - si z_{BF} reste supérieur à 0,7, le système sera plus rapide,
 - si z_{BF} est inférieur à 0,7, le temps de montée t_m sera plus faible donc le système sera plus rapide mais le temps de réponse à 5% $t_{5\%}$ ne sera pas forcément meilleur car le régime transitoire comportera d'avantage d'oscillations.

5 Exemple de la régulation de l'inclinaison du scooter UNO III

en mode auto-balancé :

Afin de stabiliser l'inclinaison du scooter, le système élabore la grandeur de commande, $u(t)$ à partir des mesures de $\dot{\psi}(t)$ (réalisée par le gyromètre) et de $\psi(t)$ (réalisée par combinaison de la mesure du gyromètre et du pendule).



Le modèle de comportement du système mécanique de fonction de transfert $H_1(p)$ est connu :

$$H_1(p) = \frac{\psi(p)}{U(p)} = \frac{K_1}{\frac{1}{\omega_1^2} \cdot p^2 - 1} \quad \text{avec } K_1 \text{ gain du système mécanique } (K_1 = 0,24 \text{ rad/V})$$

et ω_1 pulsation propre du système mécanique ($\omega_1 = 4,1 \text{ rad/s}$).

On souhaite déterminer les gains K_v et K_p qui permettent d'obtenir :

- un système stable (conditions vues à l'aide du critère de Routh : $K_v \cdot K_1 > 0$ et $K_p \cdot K_1 - 1 > 0$)
- le temps de réponse à 5% du système le plus rapide possible pour une pulsation propre $\omega_2 = 6,15 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (la pulsation ω_2 est choisie telle qu'elle soit proche de celle du système mécanique $\omega_2 = 1,5 \cdot \omega_1 = 6,15 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$).

Pour étudier la réponse du système il faut d'abord déterminer sa FTBF qui présentée sous forme

canonique, s'écrit :
$$H_2(p) = \frac{\frac{K_1}{K_p \cdot K_1 - 1}}{1 + \frac{K_v \cdot K_1}{K_p \cdot K_1 - 1} \cdot p + \frac{1}{(K_p \cdot K_1 - 1) \cdot \omega_1^2} \cdot p^2} = \frac{K_2}{\frac{1}{\omega_2^2} \cdot p^2 + \frac{2 \cdot z_2}{\omega_2} \cdot p + 1}$$

Avec :
$$K_2 = \frac{K_1}{K_p \cdot K_1 - 1}$$

$$\frac{1}{\omega_2^2} = \frac{1}{(K_p \cdot K_1 - 1) \cdot \omega_1^2} \rightarrow \omega_2 = \sqrt{(K_p \cdot K_1 - 1)} \cdot \omega_1$$

$$\frac{2 \cdot z_2}{\omega_2} = \frac{K_v \cdot K_1}{K_p \cdot K_1 - 1} \rightarrow z_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{K_v \cdot K_1 \cdot \sqrt{(K_p \cdot K_1 - 1)} \cdot \omega_1}{K_p \cdot K_1 - 1} \rightarrow z_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{K_v \cdot K_1 \cdot \omega_1}{\sqrt{(K_p \cdot K_1 - 1)}}$$

Si $\omega_2 = 1,5 \cdot \omega_1$ alors $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1,5 = \sqrt{(K_p \cdot K_1 - 1)} \rightarrow K_p = \frac{1,5^2 + 1}{K_1} = \frac{1,5^2 + 1}{0,24} = 13,5 \text{ V/rad}$

Le temps de réponse le plus rapide pour un système du 2nd ordre est obtenu pour $z_2 \approx \frac{\sqrt{2}}{2}$ soit :

$$z_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{K_v \cdot K_1 \cdot \omega_1}{\sqrt{(K_p \cdot K_1 - 1)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow K_v = \frac{2 \cdot z_2 \cdot \sqrt{(K_p \cdot K_1 - 1)}}{K_1 \cdot \omega_1} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(13,5 \times 0,24 - 1)} \cdot 0,7}{0,24 \times 4,1}$$

$$\Rightarrow K_v = 2,15 \text{ rad/V} \quad K_2 = \frac{K_1}{K_p \cdot K_1 - 1} = \frac{0,24}{13,5 \times 0,24 - 1} = 0,107 \text{ rad/V}$$

Le temps de réponse du système pour $z_2 \approx \frac{\sqrt{2}}{2}$ est de $t_{5\%} \cdot \omega_2 = 3 \rightarrow t_{5\%} = \frac{3}{\omega_2} = \frac{3}{6,15} = 0,49 \text{ s}$