

## I STABILITE

### Table des matières

1	Notion de stabilité.....	3
1.1	Stabilité – Définitions .....	3
1.2	Aspect mathématique : Les pôles de la FTBF .....	3
1.3	Réduction de l'ordre d'un système – pôle dominant.....	4
1.4	Possibilité d'instabilité après bouclage d'un système pourtant stable.....	7
2	Étude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF .....	9
2.1	Etude de la stabilité à partir des pôles de la FTBF .....	9
2.2	Critère de Routh simplifié .....	9
2.3	Exemple de la chaîne de régulation de l'inclinaison du scooter UNO III en mode auto-balancé : .....	12
2.4	Etude de la stabilité des systèmes multi-variables.....	12
3	Étude de la stabilité à partir de critères graphiques sur la FTBO.....	15
3.1	Stabilité d'un système bouclé.....	15
3.2	Critère du revers dans le plan de Bode .....	16
3.3	Marges de stabilité.....	17
3.4	Application sur la chaîne de régulation de l'inclinaison du scooter UNO III en mode auto-balancé : .....	18
3.5	Amortissement et marge de phase .....	19
4	Causes d'instabilité.....	20
4.1	Les retards purs.....	20
4.2	Le gain en boucle ouverte.....	20
4.3	Les intégrateurs.....	20

## Exemple de système asservi : **BPG Uno Scooter Concept**

Le scooter BPG Uno III est un parfait exemple de système asservi qui doit être nécessairement stable pour un bon fonctionnement. L'équilibre du système est notamment obtenu grâce à un système gyroscopique couplé à un calculateur traitant les informations et transmettant les consignes aux deux moteurs électriques équipant les deux groupes propulsion.



(<http://bpg-motors.com/>).

Uno I (Concept initial)



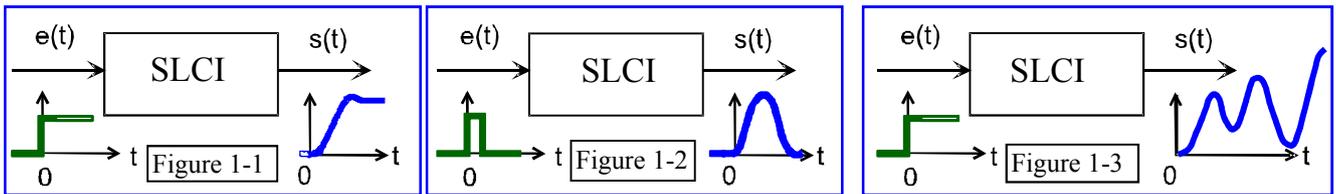
On quantifie les performances de stabilité, précision et rapidité d'un système asservi, selon l'évaluation de 3 critères que sont respectivement les dépassements, l'erreur et le temps de réponse à 5%. La stabilité est une notion générale non spécifique des systèmes asservis mais elle prend cependant une grande importance dans le cas de ces systèmes, car on souhaite toujours qu'un système asservi soit stable. La stabilité est donc la performance que l'on regarde en premier et il est inutile d'analyser les autres performances si le système n'est pas stable.

# 1 Notion de stabilité

## 1.1 Stabilité - Définitions

Exemples de systèmes stables : figures 1-1 et 1-2 :

Exemple de système instable : figure 1-3.



La définition de la stabilité d'un système linéaire peut prendre deux formes équivalentes :

- Un système est stable si à une entrée bornée\* correspond une sortie bornée.
- Un système est dit stable si sa réponse libre\*\* tend vers zéro, quand  $t \rightarrow \infty$ .

\* L'entrée peut être une consigne ou une perturbation  
 \*\* Lorsque l'entrée présente un retour à zéro (exemple un Dirac, un créneau...)



*Un système réel instable oscille jusqu'à sa destruction. Ces oscillations sont dans le cas général limitées par les différentes saturations (limites des amplificateurs opérationnels, butées physiques, ...). Ces limitations physiques font que les systèmes ne sont plus modélisables par des SLCI. Ils feront l'objet d'études spécifiques.*

Nous allons développer deux types d'études, selon que l'on analyse la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du système, ou bien la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO).

## 1.2 Aspect mathématique : Les pôles de la FTBF

Considérons un système asservi modélisé par une fonction de transfert en boucle fermée  $T(p)$ .

Si on le soumet à une impulsion  $e(t) = \delta(t) = E(p) = 1$ , on obtient :  $S(p) = T(p)$

$H(p)$  peut s'écrire, par décomposition en éléments simples, sous la forme :  $T(p) = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(p-p_i)^{q_i}}$

où les  $p_i$  sont les pôles ( $p_i = a_i + j\omega_i$  pour les pôles complexes) de la fonction de transfert.

La sortie sera de la forme :

$$s(t) = A_1 + \sum_{i=2}^{n_0} \frac{A_i t^{(i-1)}}{(i-1)!} + \sum_{k=1}^{n_1} B_k \cdot e^{p_k \cdot t} + \sum_{j=1}^{n_2} D_j e^{\sigma_j \cdot t} \cdot \sin(\omega_j t + \varphi)$$

On constate au vu de cette expression que la réponse impulsionnelle garde une valeur finie, si les conditions suivantes sont vérifiées :

- les  $p_k$  (pôles réels) et les  $\sigma_j$ ; (parties réelles des pôles complexes) doivent être **négatifs** pour que les exponentielles correspondantes soient décroissantes,
- les  $A_i$  doivent être **tous nuls** pour que la sortie libre revienne à zéro. Ce qui revient à dire qu'il ne doit pas y avoir de pôle nul, donc pas d'intégrateur dans la FTBF.



**On peut conclure de cette étude que pour qu'un système linéaire soit stable :**

- **Il faut que les pôles de sa fonction de transfert soient**
- **des pôles réels tous strictement négatifs**
- **des pôles complexes à partie réelle strictement négative.**

Exemple : une fonction de transfert en boucle fermée :

- 2 pôles nuls
- 1 pôle réel simple  $p = a$
- 1 pôle réel double  $p = b$
- 2 pôles complexes conjugués simples  $p = c \pm j \cdot d$

On soumet ce modèle à une entrée en Dirac  $e(t) = \delta(t) = E(p) = 1$

$S(p)$  peut donc s'écrire :  $S(p) = H(p) \cdot E(p) = H(p) \cdot 1 = \frac{N(p)}{p^2 \cdot (p-a) \cdot (p-b)^2 \cdot ((p-c)^2 + d^2)}$

$S(p)$  peut ensuite se décomposer :  $S(p) = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p^2} + \frac{B}{p-a} + \frac{C_1}{p-b} + \frac{C_2}{(p-b)^2} + \frac{D \cdot p + E}{(p-c)^2 + d^2}$

La transformée inverse de Laplace de  $S(p)$  permet le retour temporel :

$s(t) = \left( A_1 + A_2 \cdot t + B \cdot e^{a \cdot t} + C_1 \cdot e^{b \cdot t} + C_2 \cdot t \cdot e^{b \cdot t} + D \cdot e^{c \cdot t} \cdot \cos(d \cdot t) + \frac{D \cdot c + E}{d} \cdot e^{c \cdot t} \cdot \sin(d \cdot t) \right) \cdot u(t)$

Pour que la sortie revienne à zéro, il ne faut pas d'intégrateur et il faut que a, b, c, négatifs. Ce qui revient bien à dire que les pôles de la partie réelle des racines est strictement négative.



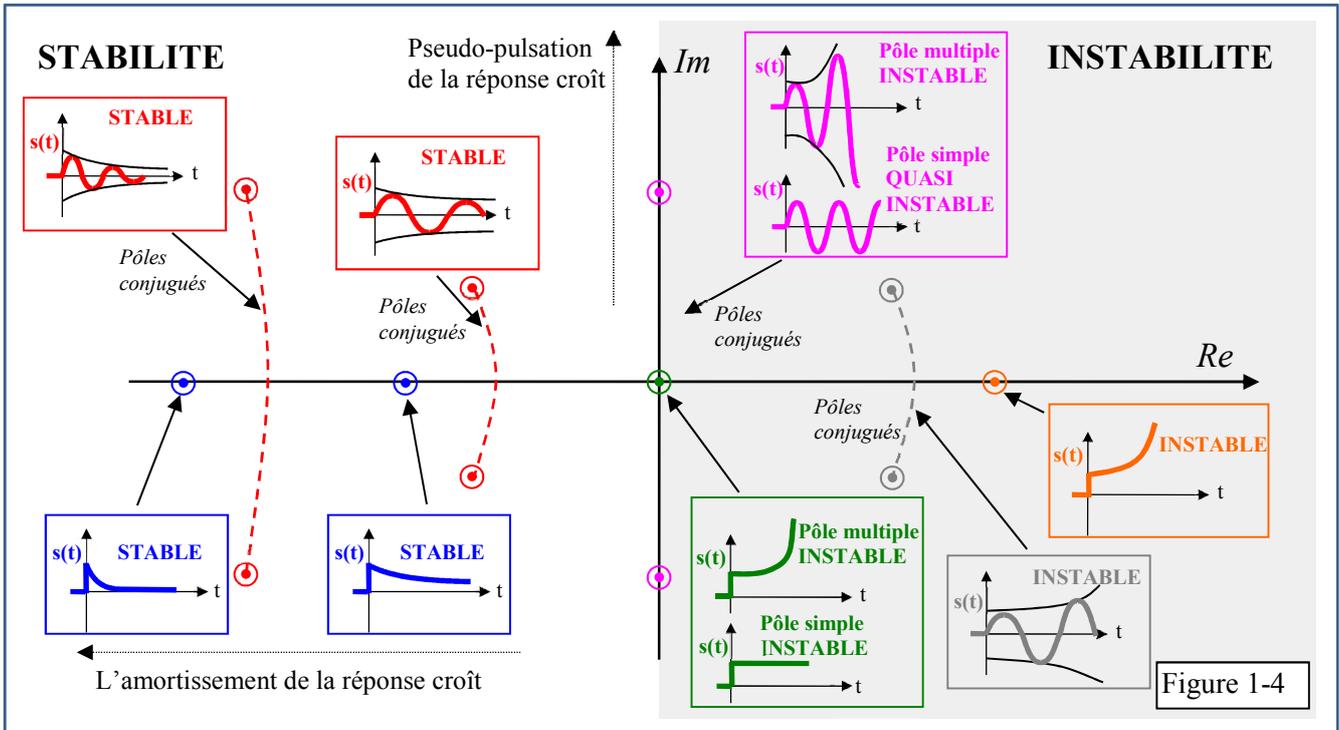
*Cet énoncé ne permet cependant pas de qualifier le comportement d'un système asservi. En effet, **un système très mal amorti sera stable au sens strict du terme, mais jugé d'une stabilité insuffisante (mauvais amortissement). En d'autres termes, il nous sera nécessaire d'aller au-delà de cette définition pour préciser la qualité de la stabilité d'un système donné.***

### 1.3 Réduction de l'ordre d'un système – pôle dominant.

Pour mieux en comprendre le rôle des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée, (FTBF), on a représenté **dans le plan complexe** (fig 1-4 et 1-5) **l'allure de la réponse à l'impulsion de Dirac** selon la position des pôles de la FTBF d'un système.

- On retrouve les sorties instables déjà étudiées correspondant à des parties réelles négatives ou nulles.
- Pour les pôles à partie réelle négative, la réponse converge vers zéro et plus le pôle est éloigné de l'axe imaginaire, plus la décroissance est rapide. L'amortissement croît.
- On observe que les racines complexes conjuguées font apparaître des oscillations.
- On distingue les racines réelles par leur absence d'oscillation.

**Le cas particulier du second ordre** : on peut relier ces comportements à l'évolution de la pulsation propre  $\omega_0$  et du coefficient d'amortissement  $\zeta$ .



**Cas particulier 1 :** Un système présentant un certain nombre de **pôles complexes à partie réelle nulle** est un système **juste oscillant** (ou système marginalement stable mais considéré instable).

**Cas particulier 2 :** Un système « **intégrateur pur** » (de FTBF= 1/p) est un **système instable** car une entrée en « échelon » conduit à une sortie en « rampe ».

**Exemple de pôles pour un second ordre :**

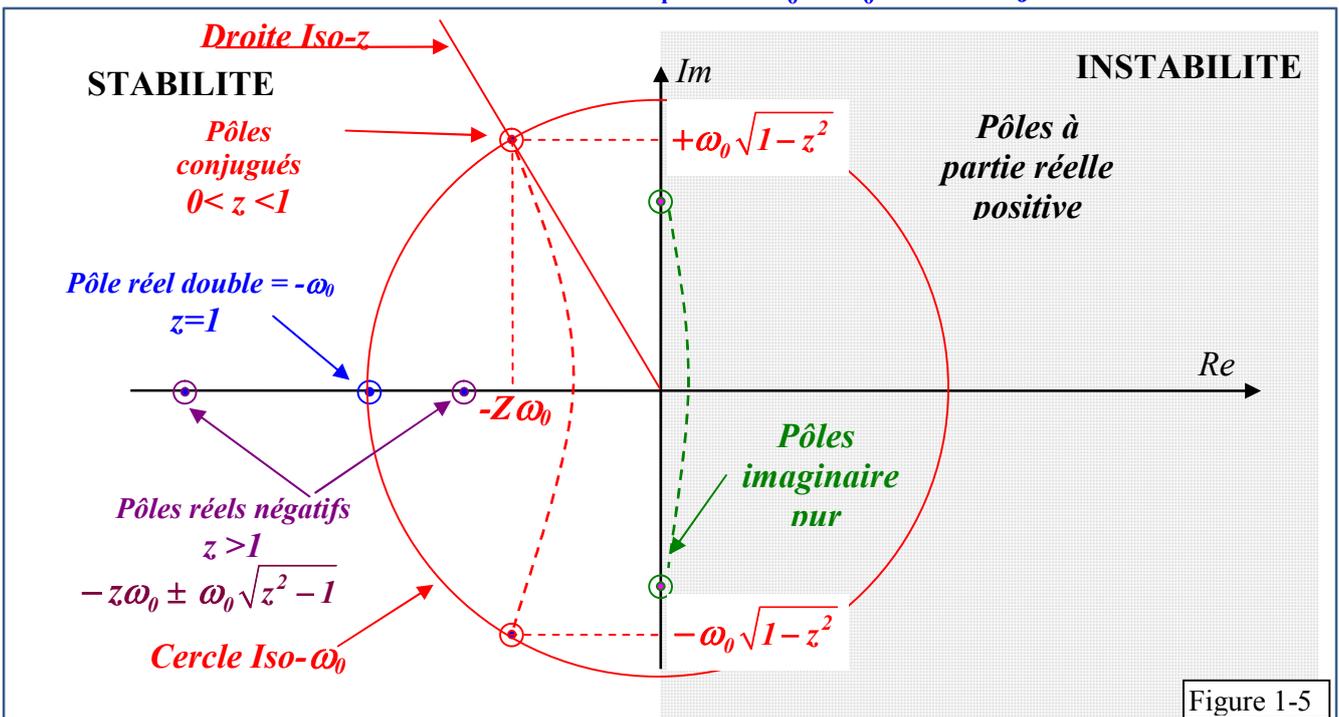
$$T(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Cas des racines réelles  $z > 1$

$$r_i = -z \cdot \omega_0 \pm \omega_0 \cdot \sqrt{z^2 - 1}$$

Cas des racines complexes  $z < 1$

$$r_i = -z \cdot \omega_0 \pm \omega_0 \cdot \sqrt{1 - z^2} \cdot j$$



Ainsi, pour un système stable, on peut remarquer que l'effet des pôles très éloignés de l'axe imaginaire disparaît bien avant celui des pôles qui en sont plus proches, compte tenu des décroissances exponentielles très différentes. Aussi, **les pôles du système les plus proches de l'axe imaginaire sont qualifiés de pôles dominants.**



Certains des pôles de la fonction de transfert (FTBF) du système ont une **contribution prépondérante** sur le comportement du modèle :  
 Il s'agit **des pôles** (à partie réelle négative) **les plus proches de l'axe des imaginaires.**  
 Ils sont appelés "**pôles dominants**" et on peut en général simplifier l'expression du dénominateur de la fonction de transfert (FTBF) en ne conservant que les termes correspondants aux pôles dominants.



le dénominateur doit être sous forme canonique avant d'effectuer la simplification !!



Lorsqu'ils sont suffisamment éloignés des pôles dominants, **les pôles les plus éloignés de l'axe imaginaire peuvent être négligés**, ce qui permet de diminuer l'ordre de la fonction de transfert  $F(p)$  modélisant le système. On peut ainsi évaluer les performances attendues d'un système **en limitant la complexité des calculs.**

Dans la pratique, le choix est simple si les pôles sont suffisamment écartés les uns des autres, et beaucoup plus délicat dans le cas contraire. Dans un cas favorable, on procède comme suit :

- on garde le pôle réel le plus proche de l'axe imaginaire et la paire de pôles complexes conjugués la plus proche de l'axe imaginaire ;
- on garde dans tous les cas les intégrateurs, donc le terme en  $p^{\alpha}$ .

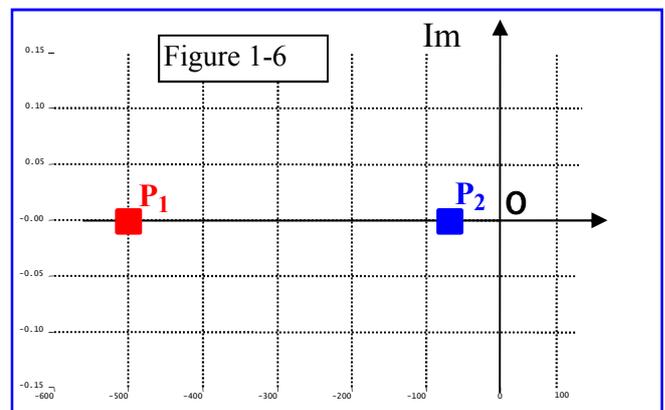
**Exemple :** Soit une fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p) \cdot (1 + T_2 p)} \quad \text{avec } T_1 \ll T_2$$

Les deux pôles de la fonction de transfert sont :

$$P_1 = -\frac{1}{T_1} \quad \text{et} \quad P_2 = -\frac{1}{T_2} \quad \text{donc } P_1 \ll P_2$$

La figure 1-6 présente la position des pôles  $P_1$  et  $P_2$  dans le plan complexe :  **$P_2$  est le pôle dominant.**

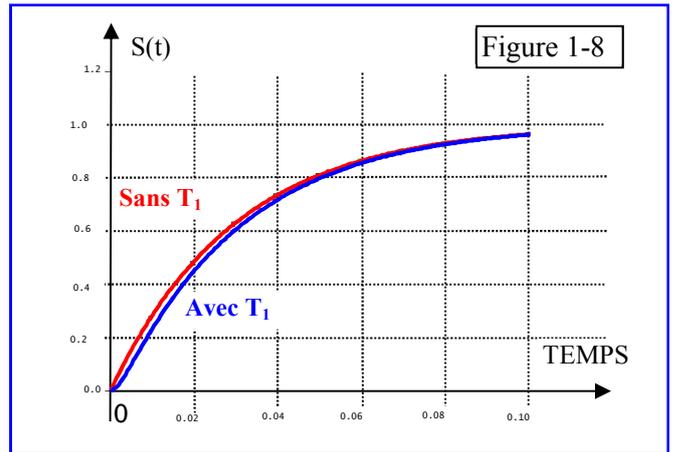
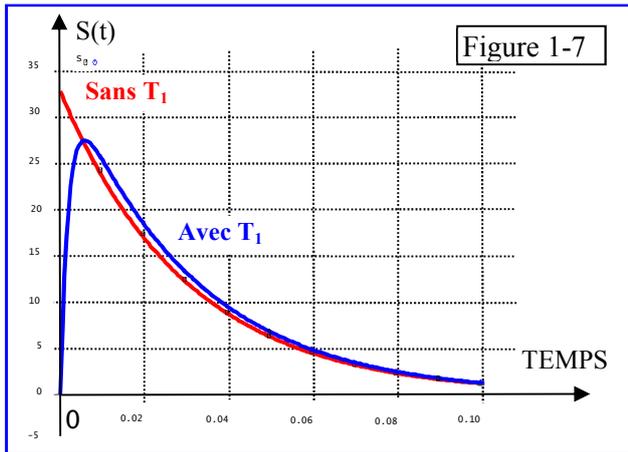


La réponse temporelle du système pour une entrée impulsionnelle (figure 1-7) montre que l'on peut négliger la constante de temps la plus faible ( $T_1$ ) pour utiliser la forme de  $F(p)$  où le terme correspondant au pôle  $P_1$  est supprimé :  $F(p) = \frac{K}{(1 + T_2 p)}$

Justification : Dans l'expression de  $s(t) = \frac{K}{T_2 - T_1} (e^{-t/T_2} - e^{-t/T_1})$ , le terme  $\frac{K}{T_2 - T_1} e^{-t/T_2}$

correspondant au pôle dominant devient prépondérant lorsque le temps croît (de même pour la réponse à l'échelon figure 1-8).

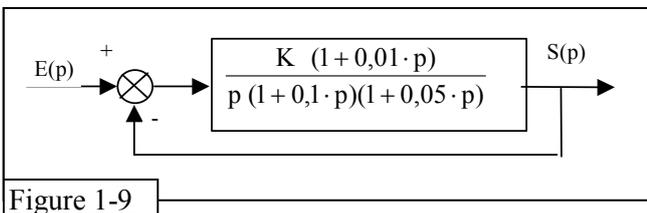
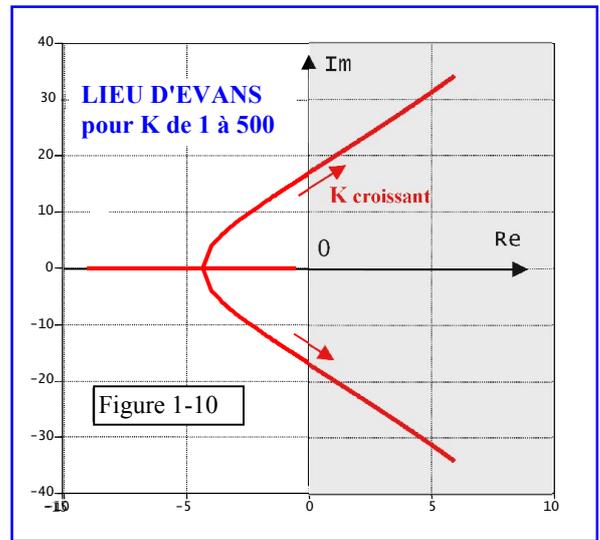
Illustration de l'influence de la suppression du pôle non dominant sur les réponses impulsionnelle et indicielle.



### Lieu d'Evans :

Les logiciels de simulation sont capables de déterminer la position des pôles d'une fonction de transfert, **pour différentes valeurs du gain de boucle K** variable de celle-ci ; la courbe obtenue est nommée "lieu d'Evans".

**Exemple** : la figure 1-10 représente le lieu d'Evans du système de la figure 1-9 lorsque K varie de 1 à 500 :

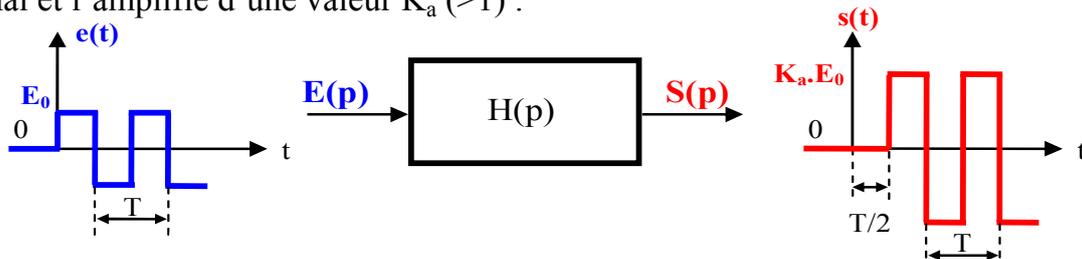


On visualise alors facilement l'instabilité ( $Re \geq 0$ ) qui apparaît avec l'augmentation du gain de boucle K.

## 1.4 Possibilité d'instabilité après bouclage d'un système pourtant stable

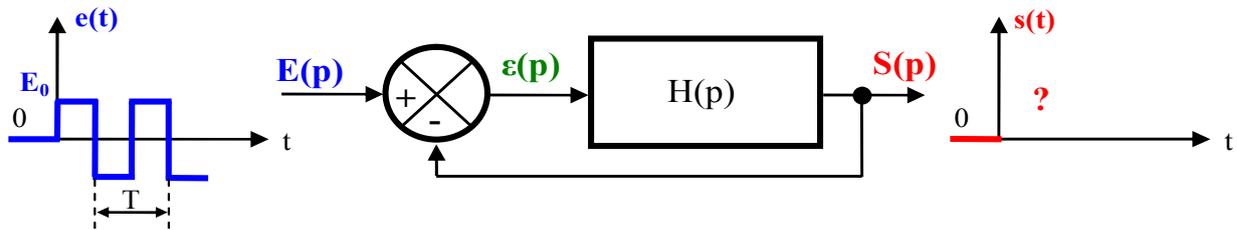
L'utilisation d'une boucle pour un SLCI, peut le déstabiliser le système. Pour illustrer le phénomène on peut comparer la réponse d'un même système, de fonction de transfert  $H(p)$ , dans le cas où il est non bouclé puis dans le cas où il est bouclé.

On le sollicite avec un même signal d'entrée  $e(t)$  rectangulaire de période  $T$  et d'amplitude  $E_0$ . On considère qu'en boucle ouverte, le système étudié (bloc  $H(p)$ ) entraîne un déphasage de  $T/2$  du signal et l'amplifie d'une valeur  $K_a (>1)$  :

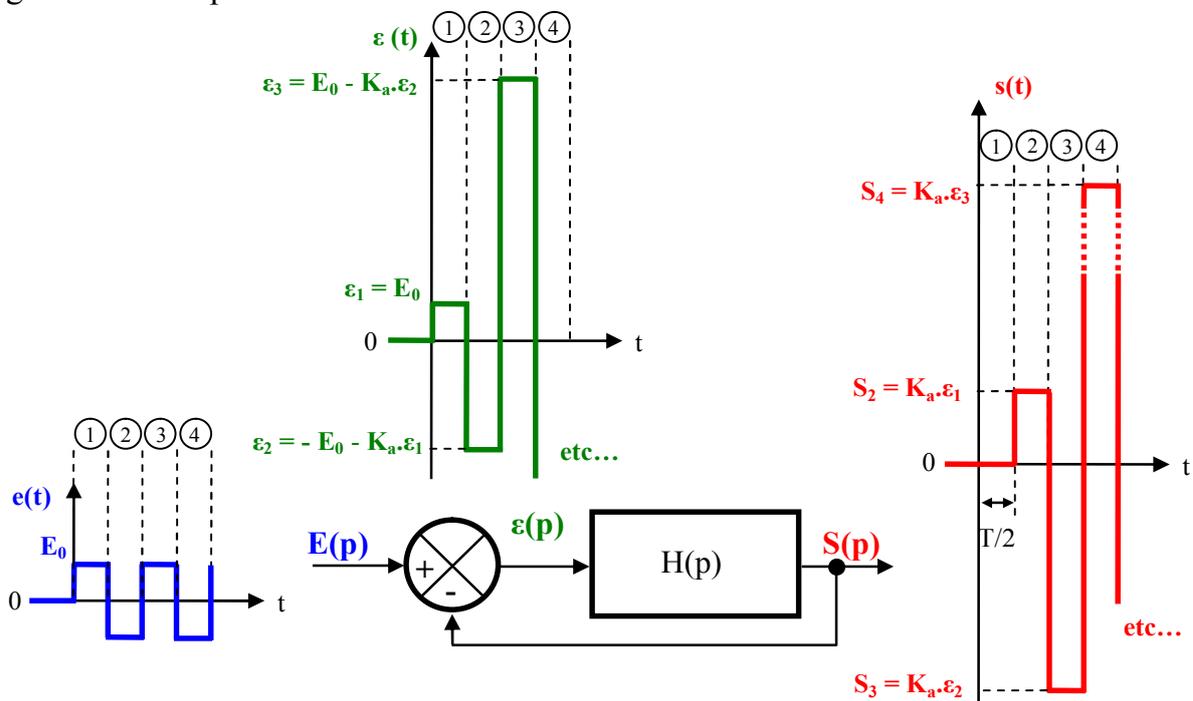


En boucle ouverte on constate que le système est stable, le signal de sortie est juste amplifié et déphasé par rapport au signal d'entrée.

Si on boucle ce même système avec un retour unitaire et qu'il est soumis à la même entrée en créneau,  $H(p)$  est maintenant soumis à une entrée  $\varepsilon(p) = S(p) - E(p)$  qui correspond à la différence entre les deux signaux d'entrée et de sortie.



Pour déterminer le signal de sortie  $s(t)$ , il faut cette fois-ci déterminer l'écart  $\varepsilon(t)$  qui entre dans le bloc,  $\frac{1}{2}$  période par  $\frac{1}{2}$  période. Le tracé obtenu montre le phénomène de « pompage » ou instabilité dans laquelle la grandeur amplifiée  $s(t)$  s'ajoute au signal d'entrée qui est lui-même de nouveau amplifié. Le processus se reproduit de période en période et le signal de sortie diverge donc très rapidement...



Pour la phase 1 : l'écart  $\varepsilon_1 = E_0$ .

Pour la phase 2 : l'écart  $\varepsilon_2 = E_2 - S_2 = -E_0 - K_a \cdot \varepsilon_1 = -E_0 \cdot (1 + K_a)$ .

Pour la phase 3 : l'écart  $\varepsilon_3 = E_3 - S_3 = E_0 - K_a \cdot \varepsilon_2 = E_0 - K_a \cdot (-E_0 \cdot (1 + K_a)) = E_0 \cdot (1 + K_a + K_a^2)$ .

Pour la phase 4 : l'écart  $\varepsilon_4 = E_4 - S_4 = -E_0 - K_a \cdot \varepsilon_3 = -E_0 - K_a \cdot (E_0 \cdot (1 + K_a + K_a^2)) = -E_0 \cdot (1 + K_a + K_a^2 + K_a^3)$ , etc...

Soit un écart qui tend en valeur absolue vers  $E_0 \cdot (1 + K_a + K_a^2 + K_a^3 + \dots + K_a^n)$ . Le signal de sortie diverge. Il y a donc instabilité après bouclage si  $K_a > 1$ .

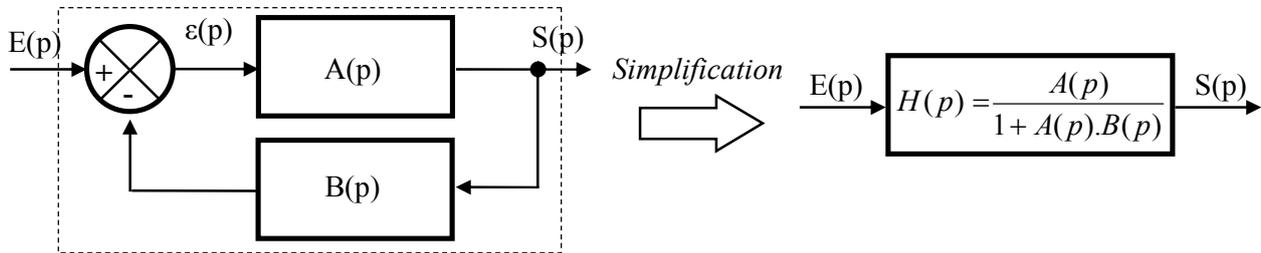
L'existence d'une boucle de retour impose donc d'étudier la stabilité des systèmes asservis :

- Soit à partir de critères analytiques sur le polynôme caractéristique de la fonction de transfert boucle fermée (FTBF) du système, ce qui nécessite d'avoir le modèle numérique de cette FTBF.
- Soit à partir de **critères graphiques sur les lieux de transfert de la fonction de transfert boucle ouverte (FTBO)** du système. Dans la pratique, les critères graphiques sont plutôt privilégiés par les ingénieurs car ils permettent de déterminer des marges de stabilité..

## 2 Étude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF

### 2.1 Etude de la stabilité à partir des pôles de la FTBF

Le calcul de la fonction de transfert boucle fermée d'un système asservi permet de passer d'un modèle bouclé à un modèle équivalent non bouclé de fonction de transfert  $H(p)$ .



La FTBF pouvant aussi se mettre sous la forme privilégiant l'écriture en pôles, il est par conséquent possible de déterminer la stabilité d'un système asservi à l'aide de la condition fondamentale.

**Rappel : Un système asservi est stable si sa FTBF possède des pôles à partie réelle négative.**

### 2.2 Critère de Routh simplifié

*Bien qu'il ne soit plus au programme en CPGE, on pourra retenir le critère de Routh simplifié.*

Des considérations mathématiques sur les polynômes permettent d'affirmer que :  
 , si l'un des coefficients  $a_0$  à  $a_n$  du polynôme du dénominateur de la fonction de transfert  $H_{BF}(p)$  n'est pas strictement positif, alors l'équation caractéristique admet au moins une solution à partie réelle positive ou nulle.

Cette proposition permet d'énoncer une condition algébrique de stabilité :



Pour qu'un système asservi soit stable, il est nécessaire que les coefficients  $a_0$  à  $a_n$  du polynôme du dénominateur de sa fonction de transfert en boucle fermée  $H_{BF}(p)$  soient tous **de même signe**.

*Nécessaire ne veut pas dire suffisant !*

#### ➤ Cas d'un premier ou d'un deuxième ordre

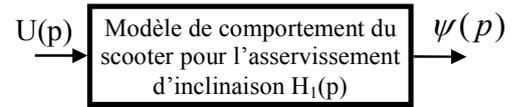
Cette condition est suffisante pour un 1<sup>er</sup> et un deuxième ordre :



1 <sup>er</sup> ordre	2 <sup>ème</sup> ordre
$D(p) = a_0 + a_1 \cdot p$	$D(p) = a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2$
stable si les deux coefficients $a_0$ et $a_1$ sont de même signe.	stable si les trois coefficients $a_0$ , $a_1$ et $a_2$ sont de même signe.

**Exemple :** Chaîne de régulation de l'inclinaison du scooter UNO III en mode auto-balancé :

La chaîne d'action permettant de réguler l'inclinaison du scooter est réalisée par un ensemble amplificateur et motoréducteur. Cet ensemble délivre un couple moteur qui permet d'incliner le châssis par rapport à la verticale.



Le modèle de comportement de ce système (amplificateur + motoréducteur + modèle dynamique du châssis  $\approx$  pendule inverse) donne une fonction de transfert qui peut s'écrire sous la forme :

$$H_1(p) = \frac{\psi(p)}{U(p)} = \frac{K_1}{\omega_1^2 \cdot p^2 - 1}$$

Avec :  $U(p)$  transformée de Laplace de la tension de commande du motoréducteur,  $\psi(p)$  transformée de Laplace de l'angle d'inclinaison du scooter par rapport à la verticale,  $K_1$  gain du système mécanique ( $K_1 = 0,24 \text{ rad/V}$ ) et  $\omega_1$  pulsation propre du système mécanique ( $\omega_1 = 4,1 \text{ rad/s}$ ).

L'écriture en pôles donne :

$$H_1(p) = \frac{\psi(p)}{U(p)} = \frac{K_1 \cdot \omega_1^2}{p^2 - \omega_1^2} = \frac{K_1 \cdot \omega_1^2}{(p - \omega_1) \cdot (p + \omega_1)} = \frac{K_1 \cdot \omega_1^2}{(p - 4,1) \cdot (p + 4,1)}$$

$H_1(p)$  possède 2 pôles réels dont un est positif  $\rightarrow$  le modèle dynamique du scooter sans asservissement est donc instable. On pouvait s'y attendre puisque le centre de gravité du scooter est au dessus de l'axe de rotation des roues (pendule inversé !).

➤ Cas d'un ordre supérieur à deux :



3 <sup>ème</sup> ordre	4 <sup>ème</sup> ordre et plus
$D(p) = a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + a_3 \cdot p^3$ stable si les quatre coefficients $a_0, a_1, a_2$ et $a_3$ sont de même signe <u>et si</u> $a_1 \times a_2 > a_0 \times a_3$ .	A l'aide de la calculatrice, chercher les racines et voir le signe des parties réelles des pôles.

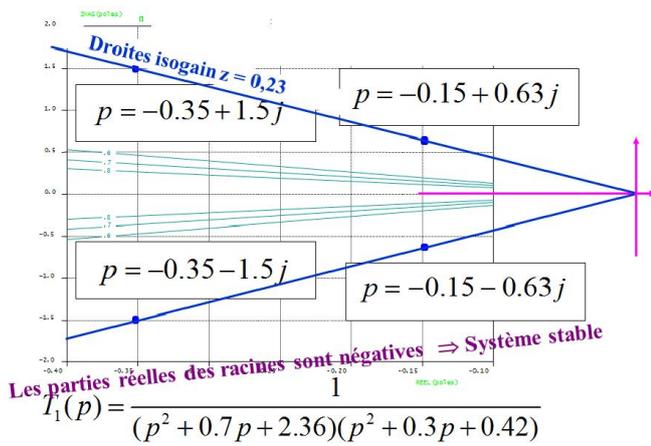
**Application :** Commenter la stabilité des trois modèles ci-dessous :

$$\text{FTBF} : T_1(p) = \frac{1}{p^4 + p^3 + 3p^2 + p + 1}$$

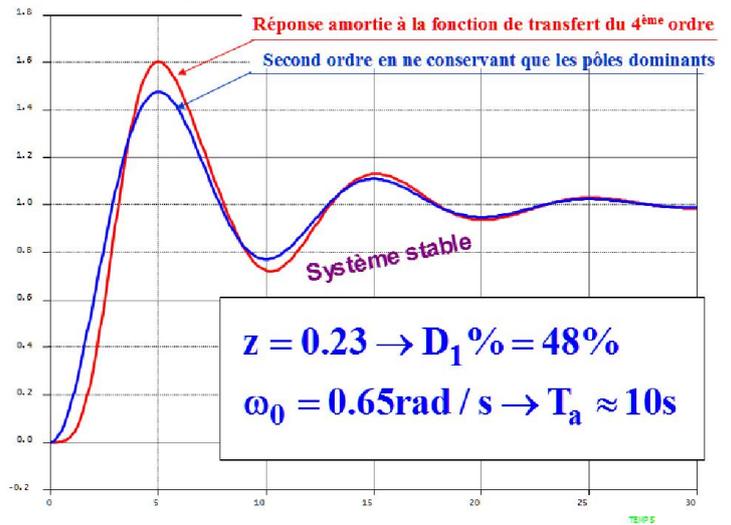
$$\text{FTBF} : T_2(p) = \frac{1}{p^4 + p^3 + 5p^2 + 4p + 4}$$

$$\text{FTBO} : H_2(p) = \frac{10}{p \cdot (p+1) \cdot (10p+1)}$$

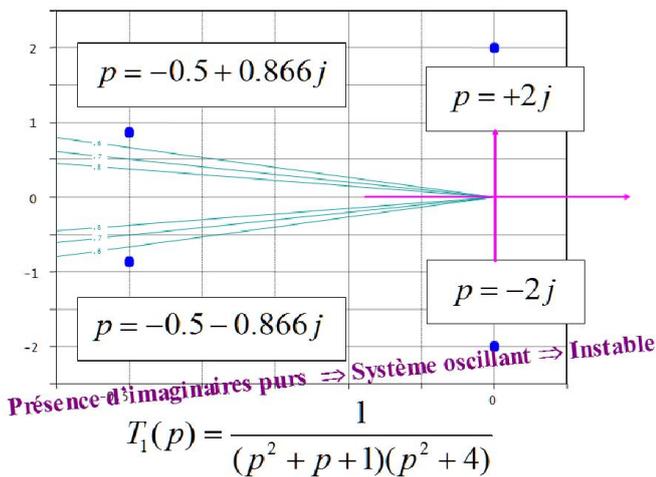
FTBF :  $T_1(p) = \frac{1}{p^4 + p^3 + 3p^2 + p + 1}$



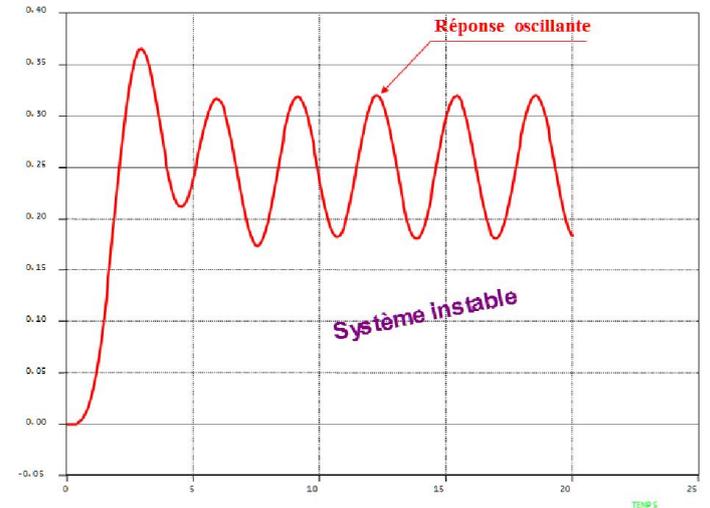
## Réponse indicielle



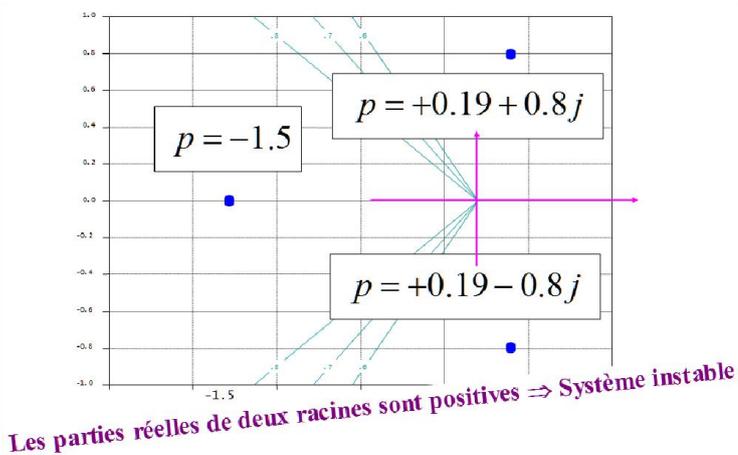
FTBF :  $T_2(p) = \frac{1}{p^4 + p^3 + 5p^2 + 4p + 4}$



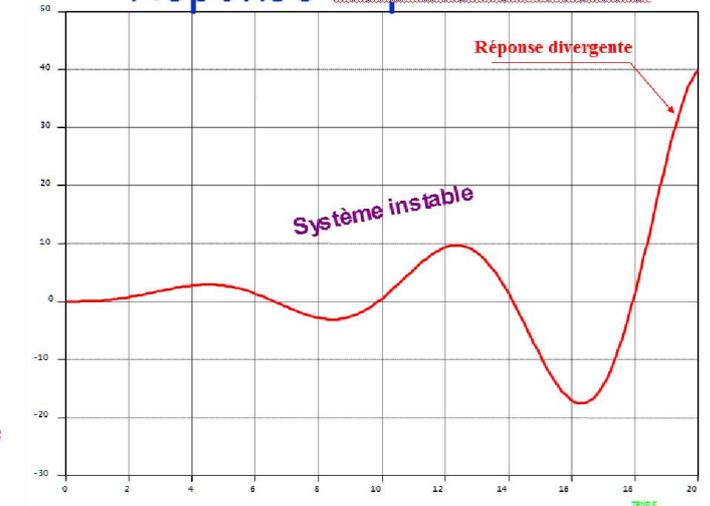
## Réponse indicielle



FTBO :  $H_2(p) = \frac{10}{p \cdot (p+1) \cdot (10p+1)}$



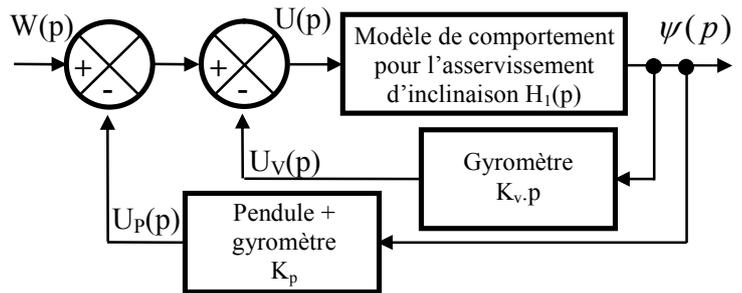
## Réponse impulsionnelle



FTBF :  $T_3(p) = \frac{1}{1 + 0.1p + 1.1p^2 + p^3}$  On vérifie aussi qu'on n'a pas  $a_1 \times a_2 > a_0 \times a_3$

## 2.3 Exemple de la chaine de régulation de l'inclinaison du scooter UNO III en mode auto-balancé :

Afin de stabiliser l'inclinaison du scooter, la grandeur de commande,  $u(t)$  est en fait élaborée à partir des mesures de  $\psi(t)$  (réalisée par le gyromètre) et de  $\dot{\psi}(t)$  (réalisée par combinaison de la mesure du gyromètre et du pendule).



Pour étudier le comportement du système il faut d'abord déterminer la FTBF du système :

$$H_2(p) = \frac{\psi(p)}{W(p)} = \frac{\frac{H_1(p)}{1+pK_v.H_1(p)}}{\frac{K_p.H_1(p)}{1+pK_v.H_1(p)}} = \frac{H_1(p)}{1+pK_v.H_1(p)+K_p.H_1(p)} = \frac{\frac{K_1.\omega_1^2}{p^2-\omega_1^2}}{1+pK_v.\frac{K_1.\omega_1^2}{p^2-\omega_1^2}+K_p.\frac{K_1.\omega_1^2}{p^2-\omega_1^2}} = \frac{K_1.\omega_1^2}{p^2-\omega_1^2+pK_v.K_1.\omega_1^2+K_p.K_1.\omega_1^2}$$

Premier examen du critère de Routh :

Tous les coefficients du polynôme caractéristique de la FTBF doivent être positifs et non nuls.

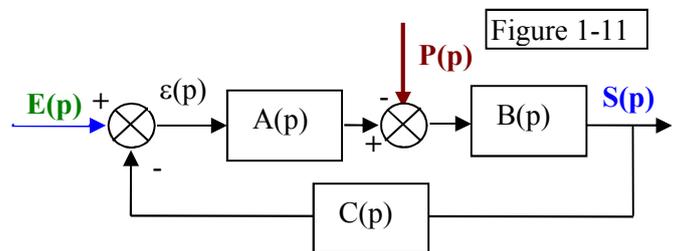
$$D(p) = p^2 + p.K_v.K_1.\omega_1^2 + K_p.K_1.\omega_1^2 - \omega_1^2 \text{ donc } K_v.K_1 > 0 \text{ et } K_p.K_1 - 1 > 0.$$

Ici le 1<sup>er</sup> examen suffit puisque le polynôme caractéristique est du 2<sup>nd</sup> degré donc au final pour que le système soit stable il faut  $K_v > 0$  et  $K_p > \frac{1}{K_1}$ .

## 2.4 Etude de la stabilité des systèmes multi-variables

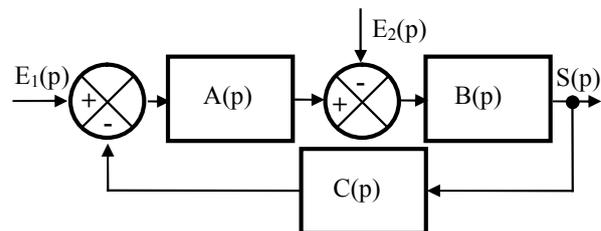
Exemple :

Dans le cas d'un système subissant une perturbation  $P(p)$ , si l'on étudie l'évolution de la sortie  $s(t)$ ,  
d'une part par rapport à l'entrée  $e(t)$ ,  
d'autre part par rapport à la perturbation  $p(t)$ ,

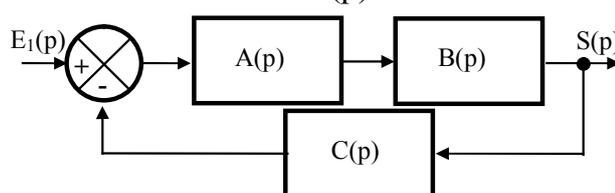


Dans le cas de systèmes multi-variables, on superpose deux modes :

- un 1<sup>er</sup> mode pour lequel l'entrée  $E_2(p)$  est considérée comme nulle et
- un 2<sup>nd</sup> mode pour lequel l'entrée  $P(p)$  est considérée comme nulle.



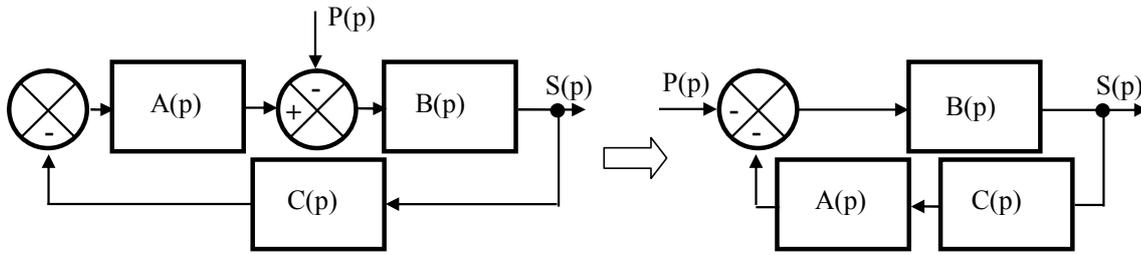
- Mode à entrée  $P(p)=0$



$$H_1(p)|_{P(p)=0} = \frac{S(p)}{E_1(p)}|_{P(p)=0} = \frac{A(p) \cdot B(p)}{1 + A(p) \cdot B(p) \cdot C(p)}$$

$H_1(p)$  est appelée la fonction de transfert en poursuite.

- Mode à entrée  $E(p)=0$



$$H_2(p) \Big|_{E(p)=0} = \frac{S(p)}{E_2(p)} \Big|_{E(p)=0} = \frac{-B(p)}{1 + A(p) \cdot B(p) \cdot C(p)}$$

Le théorème de superposition permet d'obtenir la fonction de transfert en boucle fermée du système multi-variables :

$$\text{en } S(p) = H_1(p) \cdot E(p) + H_2(p) \cdot P(p) = \frac{A(p) \cdot B(p)}{1 + A(p) \cdot B(p) \cdot C(p)} \cdot E(p) + \frac{-B(p)}{1 + A(p) \cdot B(p) \cdot C(p)} \cdot P(p)$$

On observe que ces deux études se font avec la même FTBO ;

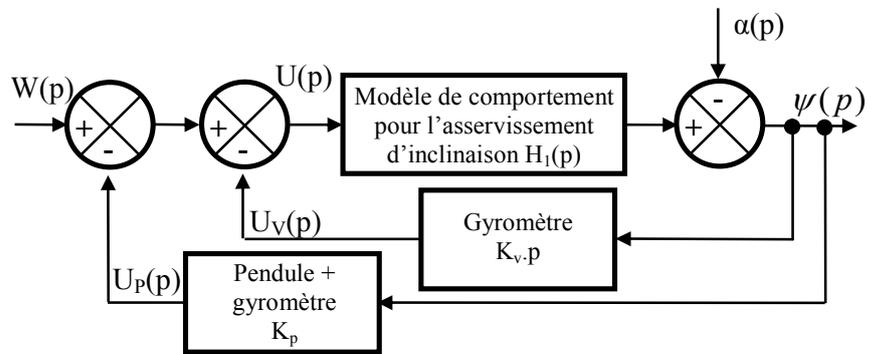
On montre alors que les pôles de la FTBF  $S(p) / E(p)$ , et ceux de la fonction de transfert  $S(p) / P(p)$  sont les mêmes.



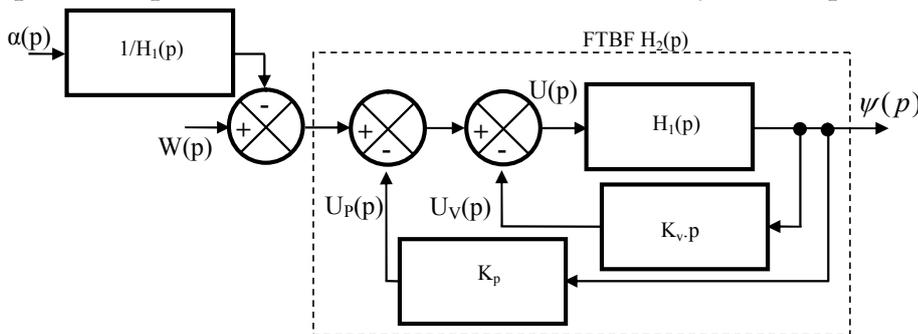
**L'étude de stabilité du système comprenant les perturbations est donc la même que celle du système sans perturbation ;** donc on ne fera qu'une seule étude : celle de la FTBF :  $S(p) / E(p)$ .

Exemple de la chaîne de régulation de l'inclinaison du scooter UNO III en mode auto-balancé :

Si le passager du scooter s'incline en avant ou en arrière il crée une perturbation modélisée par un angle  $\alpha(p)$ . Cette perturbation sera compensée par le système.



Après manipulation du schéma bloc on obtient le système équivalent suivant :



La superposition permet d'obtenir la fonction de transfert boucle fermée du système multi-variables :

$$\psi(p) = H_2(p).W(p) - \frac{1}{H_1(p)}.H_2(p).\alpha(p)$$

$$\psi(p) = \frac{H_1(p)}{1 + K_p.H_1(p) + p.K_v.H_1(p)}.W(p) - \frac{1}{H_1(p)} \cdot \frac{H_1(p)}{1 + K_p.H_1(p) + p.K_v.H_1(p)}.\alpha(p)$$

$$\text{Soit } \psi(p) = \frac{H_1(p)}{1 + K_p.H_1(p) + p.K_v.H_1(p)}.W(p) - \frac{1}{1 + K_p.H_1(p) + p.K_v.H_1(p)}.\alpha(p)$$

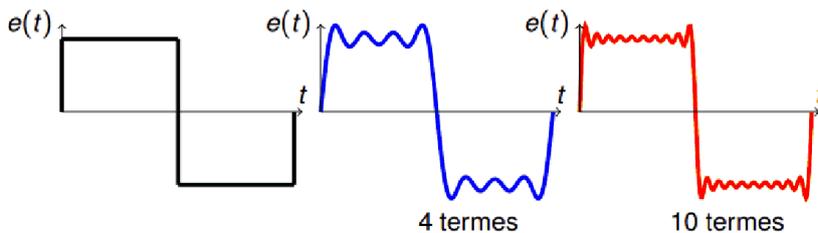
Le polynôme caractéristique de la FTBF D(p) est le même pour la fonction de transfert en poursuite  $\psi(p) / W(p)$  et la fonction de transfert en régulation  $\psi(p) / \alpha(p)$ . L'étude précédente de la stabilité sans la perturbation reste donc toujours valable et suffisante.

### 3 Étude de la stabilité à partir de critères graphiques sur la FTBO

Dans la pratique, l'étude de la stabilité **des systèmes bouclés** se fait plutôt **graphiquement dans le domaine fréquentiel** à partir de la FTBO.

Le fait que les critères soient fréquentiels ne doit pas conduire à penser que l'instabilité ne peut se produire que si l'entrée est sinusoïdale. En effet, tout signal d'entrée (un échelon par exemple) peut être décomposé en série de Fourier et donc être considéré comme une somme de signaux sinusoïdaux couvrant un large spectre de pulsations.

Exemple du créneau

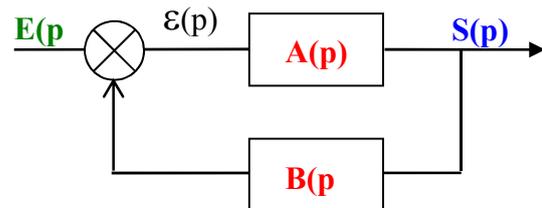


#### 3.1 Stabilité d'un système bouclé

Le système bouclé ci-contre a pour FTBF dans sa forme isochrone :

$$T(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{1 + A(j\omega) \cdot B(j\omega)}$$

Sa stabilité est conditionnée par le signe de la partie réelle des pôles de  $T(j\omega)$ .



Il faut donc étudier les solutions de  $1 + A(j\omega) \cdot B(j\omega) = 0$ .

*Rappel,*

- La résolution d'une telle équation pose rapidement de sérieux problèmes de calculs. Elle n'est envisagée qu'avec une assistance informatique.
- Dans le cas où on s'intéresse à la **stabilité stricte**, seul le signe de la partie réelle des pôles nous intéresse. On peut utiliser pour cela : Le critère de Routh. Le résultat est donc binaire et ne fournit en conséquence **aucune indication sur la qualité de la stabilité**.

#### Critère graphique:

On sait que  $T(j\omega)$  est un complexe dont le module  $\left| \frac{A(j\omega)}{1 + A(j\omega) \cdot B(j\omega)} \right|$  est égal au gain de la FTBF. On voit bien apparaître une instabilité lorsque le dénominateur s'annule.

En effet, le gain de la FTBF devient infini et cela implique que  $A(j\omega) \cdot B(j\omega)$ , le complexe représentant la FTBO doit être différent de **-1**

Par conséquent, une condition nécessaire de stabilité peut s'énoncer sous la forme suivante :



**Pour avoir un système stable, il faut que  $\forall \omega \in \mathbb{R}^+, A(j\omega) \cdot B(j\omega) \neq -1$**

Il en résulte que la FTBO ne doit pas avoir :

- un gain  $G_{BO}(\omega) = |A(j\omega) \cdot B(j\omega)| = 1$
- en même temps qu'une phase  $\varphi_{BO}(\omega) = -\pi$

- Ce troisième moyen repose sur le critère de Nyquist, et dans la pratique, sur sa version simplifiée qu'est **le critère du revers**. Outre la vérification de la stabilité ou non-stabilité d'un système, **il permet de montrer graphiquement la qualité de la stabilité et les paramètres influents**. Notre programme se limite au **critère du revers**.

### 3.2 Critère du revers dans le plan de Bode

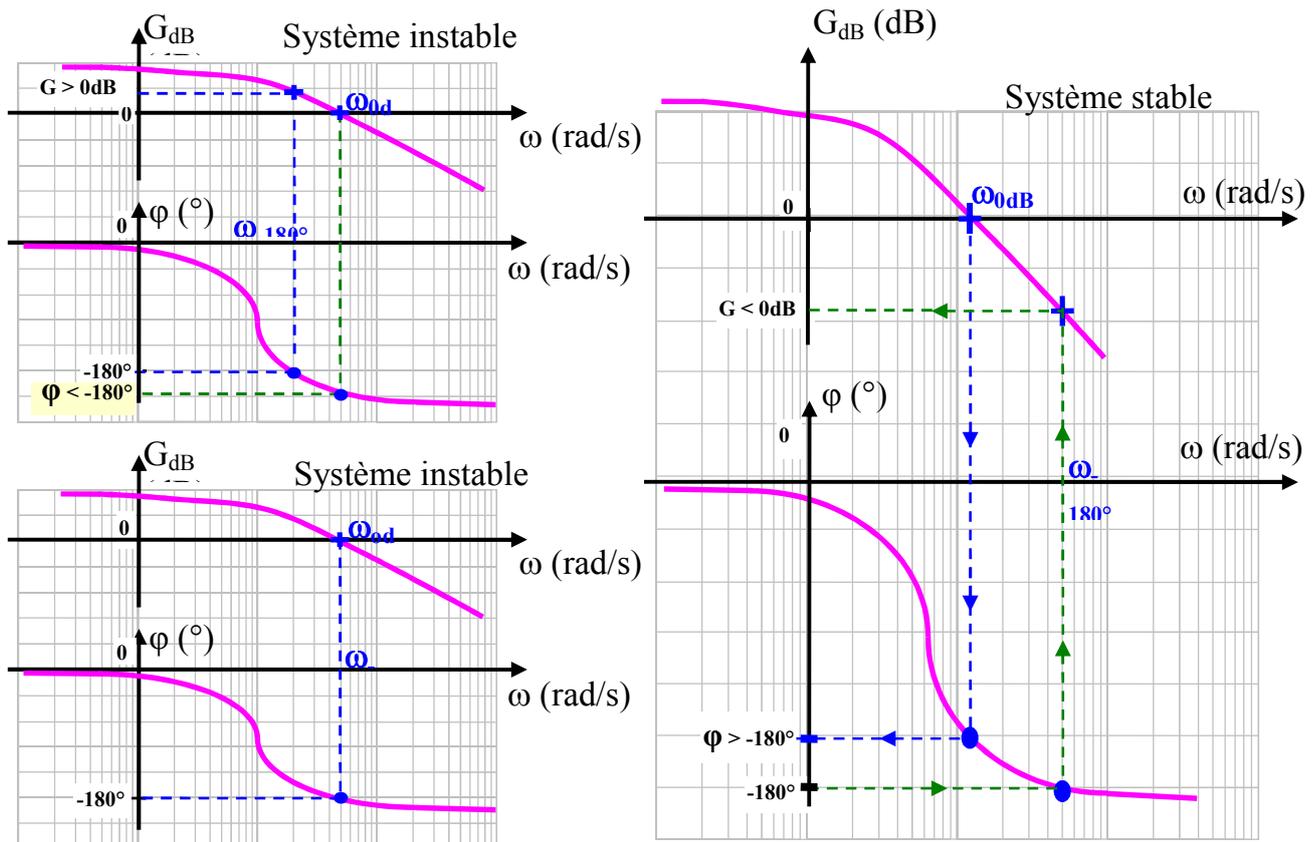
On veut montrer comment **à partir de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)**, il est possible **d'étudier la stabilité d'un système asservi**, c'est-à-dire, du système en boucle fermée.

**Enoncé du critère :**



**Le système sera stable en boucle fermée si à la pulsation  $\omega_{0dB}$ , telle que  $20\log |FTBO(j\omega)| = 0\text{dB}$ , la phase en boucle ouverte est supérieure à  $-180^\circ$ .**

**Traduction graphique :**



Autre formulation :



**Le système sera stable en boucle fermée si à la pulsation  $\omega_{-180^\circ}$ , telle que  $\arg[FTBO(j\omega)] = -180^\circ$ , le gain en boucle ouverte  $20\log |FTBO(j\omega)|$  est inférieur à  $0\text{dB}$ .**

### 3.3 Marges de stabilité.

Avoir établi qu'un système est stable ne suffit pas. On décrit plus précisément le comportement stable ou instable des systèmes en définissant des marges qui garantissent un fonctionnement satisfaisant.

Les critères retenus reposent la position du LTBO par rapport au point critique suivant deux directions : l'amplitude et la phase.

#### Définitions :

##### Marge de gain :

$$MG = -20 \cdot \log |A(j\omega_{-180}) \cdot B(j\omega_{-180})|, \omega_{-180} \text{ tel que } \text{Arg} [A(j\omega) \cdot B(j\omega)] = -180^\circ$$

Une marge de gain de 6dB permet une latitude d'un facteur 2 sur le gain en boucle ouverte. La **valeur retenue** est généralement comprise entre **6 et 15dB**. On retiendra **10dB**.

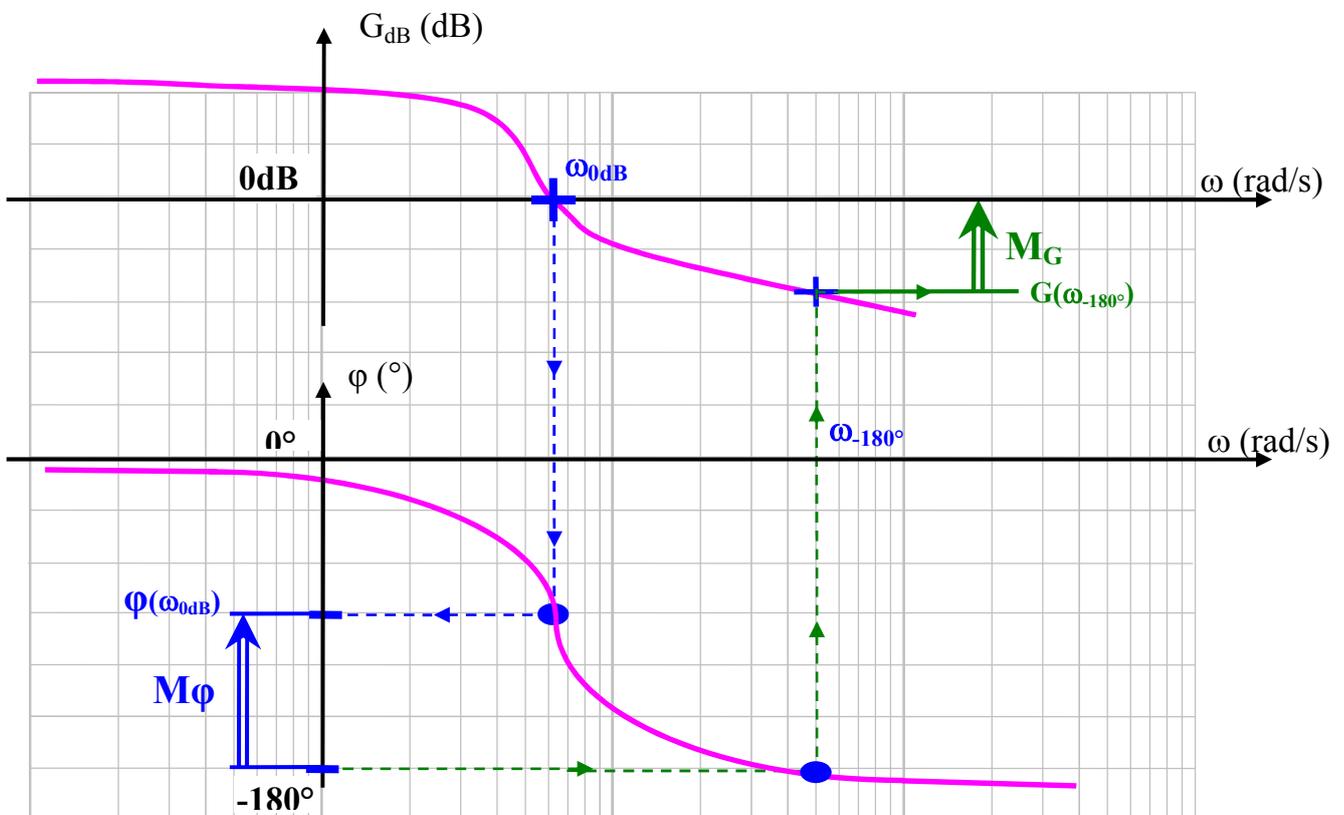
##### Marge de phase :

$$M\phi = 180 + \text{Arg} [A(j\omega_{0dB}) \cdot B(j\omega_{0dB})], \omega_{0dB} \text{ tel que } |A(j\omega) \cdot B(j\omega)| = 1$$

$\omega_{0dB}$  est appelée **pulsation de coupure à 0dB**

La **valeur pratique** retenue pour la marge de phase est comprise entre **45 et 60°**.

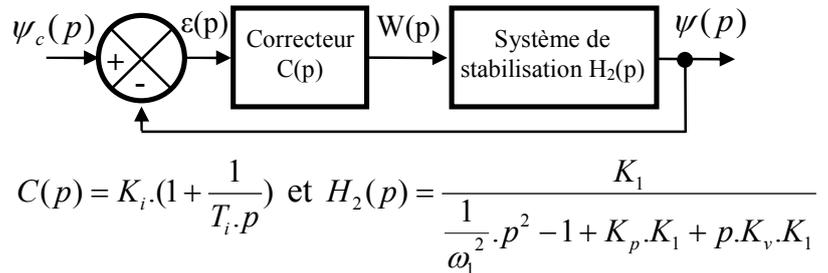
#### Marge de gain et de phase dans le plan de Bode



### 3.4 Application sur la chaîne de régulation de l'inclinaison du scooter UNO III en mode auto-balancé :

La consigne de la régulation de l'inclinaison du châssis  $\psi(t)$  par rapport à la verticale est notée  $\psi_c(t)$ .

Sur le système il existe un correcteur proportionnel intégral de fonction de transfert  $C(p)$  qui élabore le signal  $w(t)$  (de transformée de Laplace  $W(p)$ ) à partir de l'écart  $\varepsilon(t) = \psi_c(t) - \psi(t)$ .

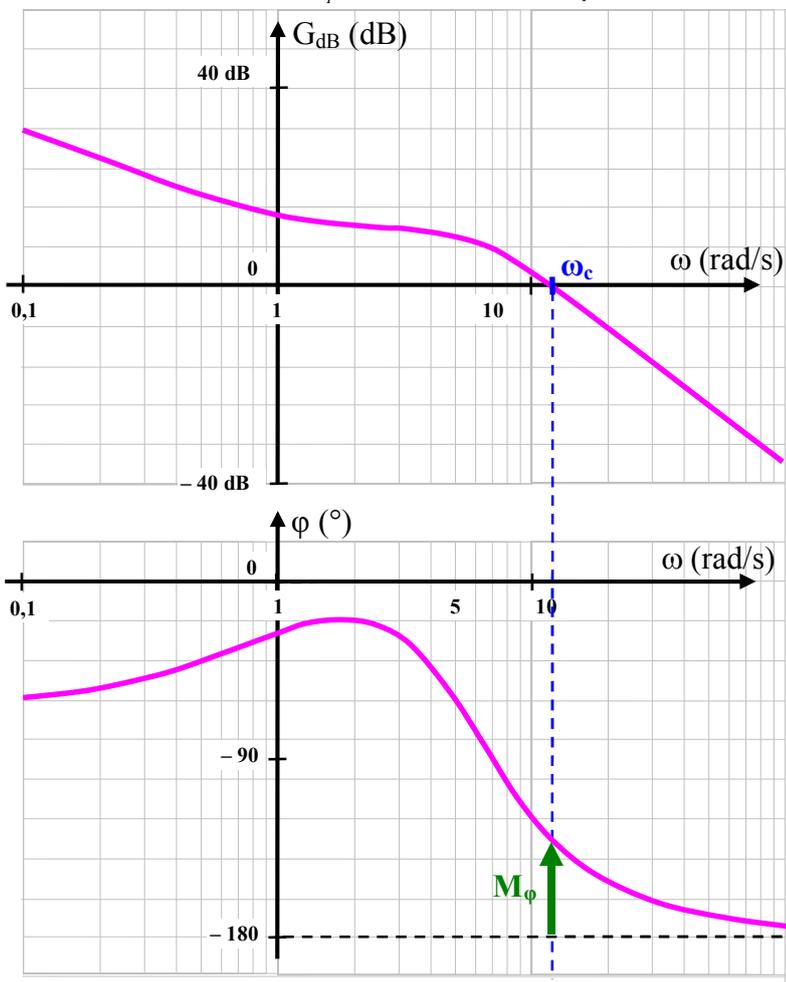


Où  $K_1 = 0,24 \text{ rad/V}$ ,  $\omega_1 = 4,1 \text{ rad/s}$ ,  $K_v = 2,15 \text{ rad/V}$ ,  $K_p = 13,5 \text{ V/rad}$ ,  $K_i = 31,7 \text{ V/rad}$  et  $T_i = 0,93 \text{ s}$ .

Pour étudier graphiquement la stabilité du système il faut déterminer la FTBO  $T(p) = \frac{\psi(p)}{\varepsilon(p)}$ .

$$T(p) = \frac{\psi(p)}{\varepsilon(p)} = C(p) \cdot H_2(p) = K_i \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p}\right) \cdot \frac{K_1}{\frac{1}{\omega_1^2} \cdot p^2 + p \cdot K_v \cdot K_1 - 1 + K_p \cdot K_1} \quad \text{Soit :}$$

$$T(p) = K_i \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p}\right) \cdot \frac{\frac{K_1}{K_p \cdot K_1 - 1}}{\frac{1}{(K_p \cdot K_1 - 1) \cdot \omega_1^2} \cdot p^2 + \frac{K_v \cdot K_1}{K_p \cdot K_1 - 1} \cdot p + 1} = 31,7 \cdot \left(1 + \frac{1}{0,93 \cdot p}\right) \cdot \frac{0,107}{0,0265 \cdot p^2 + 0,23 \cdot p + 1}$$



Graphiquement on constate à l'aide du critère du revers que le système est stable.

Sa marge de phase pour  $\omega_c$  étant égale à  $M_\phi = 45^\circ$ .

### 3.5 Amortissement et marge de phase

L'amortissement de la réponse en BF peut être estimée à l'aide de l'abaque de Black.

Pour des systèmes qui se comportent en boucle fermée comme un second ordre oscillant,

l'amortissement est directement lié au coef. de surtension :  $Q = \frac{1}{2z\sqrt{1-z^2}}$ .

#### Une seconde approche consiste à utiliser la marge de phase.

Nous avons vu que la marge de phase permet de quantifier la "distance" entre le point critique de stabilité et le LTBO à la pulsation pour laquelle le gain en BO vaut 1.

L'utilisation de cette grandeur pour régler l'amortissement repose sur la relation suivante :

**Pour un système** du second ordre oscillant dont le **gain en boucle ouverte est "grand"**, le coefficient d'amortissement en boucle fermée peut être approximé par la marge de phase (exprimé en degré) et divisé par 100.

$$z_{BF} \approx \frac{M\varphi^\circ}{100}$$

Pour un système du second ordre, le dépassement indiciel dépend exclusivement du coef. d'amortissement.

$$d = 10\% \Rightarrow z_{BF} = 0,6 \Rightarrow M\varphi \approx 60^\circ$$

$$d = 20\% \Rightarrow z_{BF} = 0,45 \Rightarrow M\varphi \approx 45^\circ$$

Cette relation permet pour les systèmes dont le comportement en BF est comparable à celui d'un second ordre d'estimer la marge de phase à régler pour obtenir un amortissement donné en boucle fermée.



## 4 Causes d'instabilité

### 4.1 Les retards purs

Lorsqu'un système modélisé par une fonction  $H(p)$  subit un retard pur noté  $r$ , la fonction de transfert est multipliée par  $e^{-rp}$ .

Le nouveau modèle s'écrit alors :

$$T(p) = H(p) \cdot e^{-rp}$$

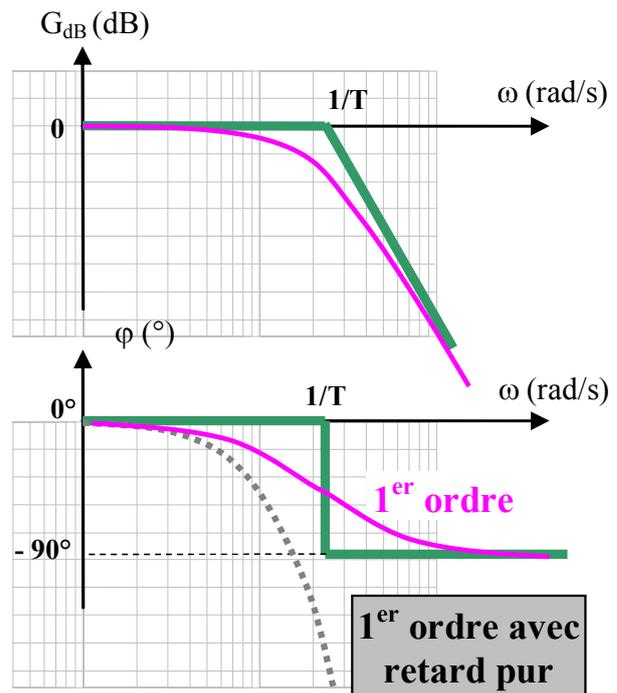
C qui donne pour la réponse harmonique :  $T(j \cdot \omega) = H(j \cdot \omega) \cdot e^{-r \cdot j \cdot \omega}$

On note que  $e^{-r \cdot j \cdot \omega}$  a

- un module constant et égal à 1 soit  $20 \log(G) = 0 \text{ dB}$
- et un argument :  $\varphi = -r \cdot \omega$ .

Exemple : 
$$H(j\omega) = \frac{e^{-T \cdot j\omega}}{1 + T \cdot j\omega}$$

Il s'agit d'un retard pur associé à un système du 1er ordre. Seule la courbe de phase du système est affectée par le retard pur.

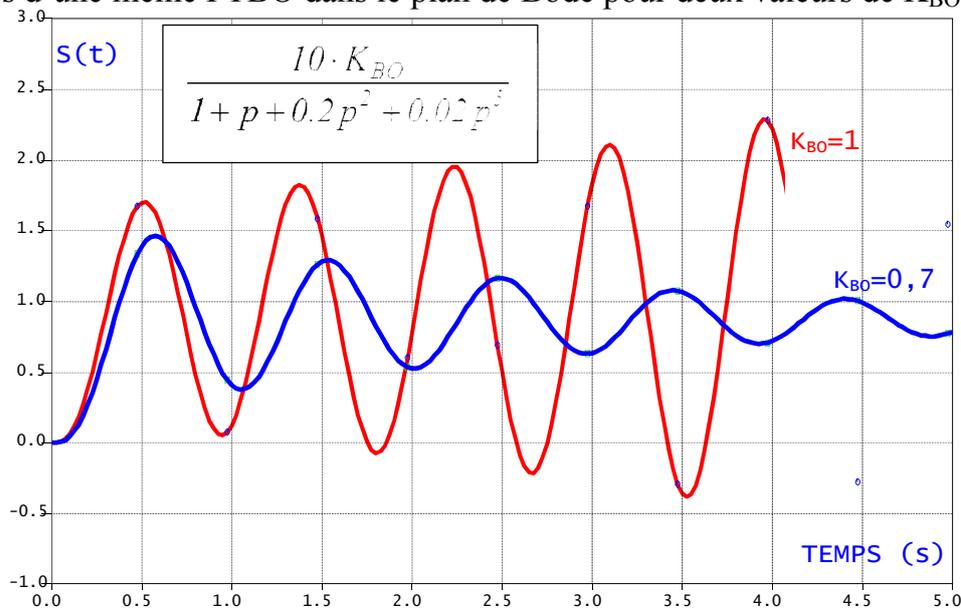


La présence d'un retard pur (il y a en dans tous les systèmes) dans la FTBO pourra entraîner l'instabilité du système en BF.

### 4.2 Le gain en boucle ouverte

Pour les systèmes d'ordre supérieur à 2 l'augmentation du gain en boucle ouverte  $K_{BO}$  peut conduire à un risque d'instabilité.

Tracés d'une même FTBO dans le plan de Bode pour deux valeurs de  $K_{BO}$ .



### 4.3 Les intégrateurs

La présence d'intégrateur(s) dans la FTBO apporte un déphasage de  $-90^\circ$ , ce qui rapproche le lieu de transfert du point critique, donc tend à déstabiliser le système.