



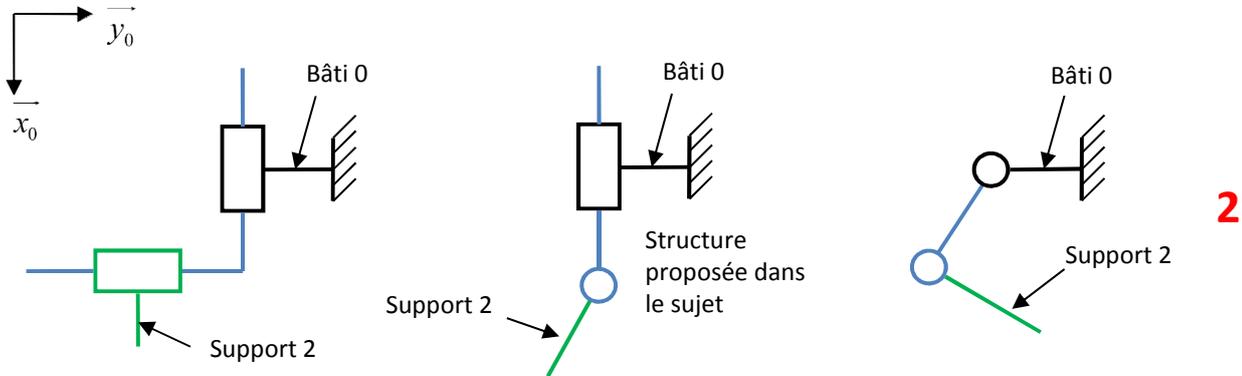
DL PSI * 2014-2015

D'après le Concours commun Centrale Supelec MP 2010

Q1 : Le bras motorisé doit pouvoir déplacer la pince dans des plans horizontaux (\vec{x}_0, \vec{y}_0) et effectuer une translation suivant une direction verticale \vec{z}_0 .

1

Pour le déplacement dans un plan horizontal, on propose les trois structures suivantes :



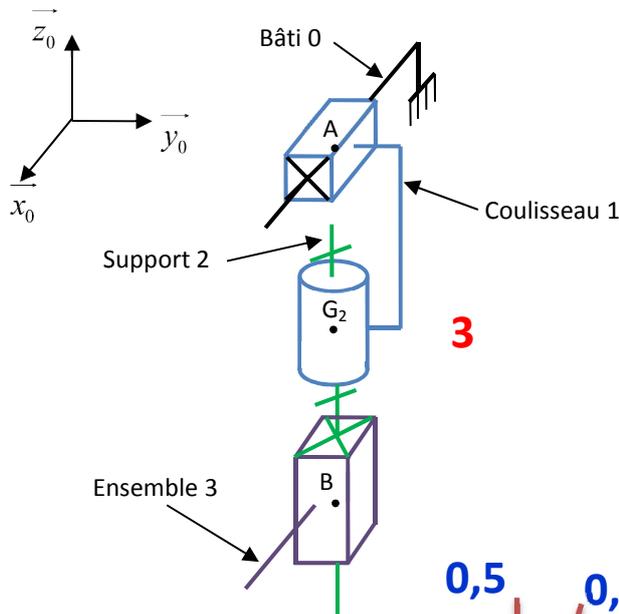
2

Q2 :

Liaison	Bâti 0 / Coulisseau 1	Coulisseau 1 / Support 2	Support 2 / Ensemble 3
Modèle de liaison proposé	Glissière	Pivot	Glissière
Caractéristiques cinématiques	Direction \vec{x}_0	Axe (G_2, \vec{z}_0)	Direction \vec{z}_0

3

Q3 :



3

0,5

0,5

4,5

Q4 :

Effort	Ensemble isolé	Théorème utilisé	Justification du choix d'isolement et de théorème
F_{M1}	1 + 2 + 3 0,5	Résultante dynamique suivant \vec{x}_0	La force recherchée F_{M1} est portée par \vec{x}_0 et la composante de la résultante transmissible par la liaison 1/0 est nulle suivant cette direction.
C_{M2}	2 + 3 0,5	Moment résultant dynamique suivant \vec{z}_0 , en G_2 .	Le couple recherchée C_{M2} est portée par \vec{z}_0 et la composante du moment transmissible par la liaison 2/1 est nulle suivant cette direction en G_2 . 1
F_{M3}	3 0,5	Résultante dynamique suivant \vec{z}_0	La force recherchée F_{M3} est portée par \vec{z}_0 et la composante de la résultante transmissible par la liaison 3/2 est nulle suivant cette direction. 1

Q5 :

On isole l'ensemble 2+3. Il est soumis à :

- l'action de la pesanteur : $\{\tau_{pes \rightarrow 2}\} = \forall P \in (G_2, \bar{z}_0) \begin{Bmatrix} -m_2 g \bar{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$ et $\{\tau_{pes \rightarrow 3}\} = \forall P \in (G_3, \bar{z}_0) \begin{Bmatrix} -m_3 g \bar{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$.
- l'action de la liaison de 1 sur 2 : $\{\tau_{1 \rightarrow 2}\} = \forall P \in (G_2, \bar{z}_0) \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 2} \bar{x}_0 + Y_{1 \rightarrow 2} \bar{y}_0 + Z_{1 \rightarrow 2} \bar{z}_0 \\ L_{P,1 \rightarrow 2} \bar{x}_0 + M_{P,1 \rightarrow 2} \bar{y}_0 \end{Bmatrix}$.
- l'action des frottements visqueux : $\{\tau_{fv \rightarrow 2}\} = \forall P \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -f_2 \dot{\theta} \bar{z}_0 \end{Bmatrix}$. **2,5**
- l'action de la motorisation M_2 : $\{\tau_{M_2 \rightarrow 2}\} = \forall P \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{M_2} \bar{z}_0 \end{Bmatrix}$

On applique le théorème du moment résultant dynamique suivant \bar{z}_0 , en G_2 : $\overline{\delta_{(G_2,2+3/0)} \cdot \bar{z}_0} = \overline{M_{G_2,2+3 \rightarrow 2+3} \cdot \bar{z}_0}$.

$$\overline{\delta_{(G_2,2/0)} \cdot \bar{z}_0} = \left[\frac{d(\overline{\sigma_{(G_2,2/0)} \cdot \bar{z}_0})}{dt} \right]_0 - \overline{\sigma_{(G_2,2/0)} \cdot \left[\frac{d\bar{z}_0}{dt} \right]_0}$$

$$\text{Or } \overline{\sigma_{(G_2,2/0)} \cdot \bar{z}_0} = \left(\overline{l_{(G_2,2)} \cdot \overline{\Omega_{(2/0)}} \right) \cdot \bar{z}_0 = J_2 \dot{\theta} \quad \Rightarrow \mathbf{1} \overline{\delta_{(G_2,2/0)} \cdot \bar{z}_0} = J_2 \ddot{\theta}$$

$$\overline{\delta_{(G_3,3/0)} \cdot \bar{z}_0} = \left[\overline{\delta_{(G_3,3/0)}} + m_3 \overline{G_2 G_3} \wedge \overline{\Gamma_{(G_3,3/0)}} \right] \cdot \bar{z}_0$$

$$\overline{\delta_{(G_3,3/0)} \cdot \bar{z}_0} = \left[\frac{d(\overline{\sigma_{(G_3,3/0)} \cdot \bar{z}_0})}{dt} \right]_0 - \overline{\sigma_{(G_3,3/0)} \cdot \left[\frac{d\bar{z}_0}{dt} \right]_0}$$

$$\text{Or } \overline{\sigma_{(G_3,3/0)} \cdot \bar{z}_0} = \left(\overline{l_{(G_3,3)} \cdot \overline{\Omega_{(3/0)}} \right) \cdot \bar{z}_0 = J_3 \dot{\theta} \quad \Rightarrow \overline{\delta_{(G_3,3/0)} \cdot \bar{z}_0} = J_3 \ddot{\theta}$$

$$\overline{V_{(G_3,3/0)}} = \left[\frac{dOG_3}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d(x\bar{x}_0 + (d_1+z)\bar{z}_0 + (d_2+d)\bar{x}_1)}{dt} \right]_0 = \dot{x}\bar{x}_0 + \dot{z}\bar{z}_0 + (d_2+d)\dot{\theta}\bar{z}_0 \wedge \bar{x}_1$$

13

$$\Rightarrow \overline{V_{(G_3,3/0)}} = \dot{x}\bar{x}_0 + \dot{z}\bar{z}_0 + (d_2+d)\dot{\theta}\bar{y}_1 \quad \mathbf{2}$$

$$\overline{\Gamma_{(G_3,3/0)}} = \left[\frac{dV_{(G_3,3/0)}}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d(\dot{x}\bar{x}_0 + \dot{z}\bar{z}_0 + (d_2+d)\dot{\theta}\bar{y}_1)}{dt} \right]_0 = \ddot{x}\bar{x}_0 + \ddot{z}\bar{z}_0 + (d_2+d)\ddot{\theta}\bar{y}_1 + (d_2+d)\dot{\theta}^2 \bar{z}_0 \wedge \bar{x}_1.$$

$$\Rightarrow \overline{\Gamma_{(G_3,3/0)}} = \ddot{x}\bar{x}_0 + \ddot{z}\bar{z}_0 + (d_2+d)\ddot{\theta}\bar{y}_1 - (d_2+d)\dot{\theta}^2 \bar{x}_1.$$

$$\left[m_3 \overline{G_2 G_3} \wedge \overline{\Gamma_{(G_3,3/0)}} \right] \cdot \bar{z}_0 = m_3 \left[(z\bar{z}_0 + (d_2+d)\bar{x}_1) \wedge (\ddot{x}\bar{x}_0 + \ddot{z}\bar{z}_0 + (d_2+d)\ddot{\theta}\bar{y}_1 - (d_2+d)\dot{\theta}^2 \bar{x}_1) \right] \cdot \bar{z}_0 \quad \mathbf{3}$$

$$\left[m_3 \overline{G_2 G_3} \wedge \overline{\Gamma_{(G_3,3/0)}} \right] \cdot \bar{z}_0 = m_3 (d_2+d) \left[\bar{x}_1 \wedge (\ddot{x}\bar{x}_0 + (d_2+d)\ddot{\theta}\bar{y}_1) \right] \cdot \bar{z}_0$$

$$\left[m_3 \overline{G_2 G_3} \wedge \overline{\Gamma_{(G_3,3/0)}} \right] \cdot \bar{z}_0 = m_3 \left(-(d_2+d)\ddot{x} \sin \theta + (d_2+d)^2 \ddot{\theta} \right)$$

$$\Rightarrow \overline{\delta_{(G_2,3/0)} \cdot \bar{z}_0} = J_3 \ddot{\theta} + m_3 \left(-(d_2+d)\ddot{x} \sin \theta + (d_2+d)^2 \ddot{\theta} \right) = \left[J_3 + m_3 (d_2+d)^2 \right] \ddot{\theta} - m_3 (d_2+d) \ddot{x} \sin \theta.$$

2

$$\overline{M_{G_2,2+3 \rightarrow 2+3} \cdot \bar{z}_0} = C_{M_2} - f_2 \dot{\theta}. \quad \mathbf{1}$$

$$\text{On en déduit donc } C_{M_2} - f_2 \dot{\theta} = \left[J_2 + J_3 + m_3 (d_2+d)^2 \right] \ddot{\theta} - m_3 (d_2+d) \ddot{x} \sin \theta \quad (E_2).$$

$$\text{D'où } C_{M_2} = \left[J_2 + J_3 + m_3 (d_2+d)^2 \right] \ddot{\theta} + f_2 \dot{\theta} - m_3 (d_2+d) \ddot{x} \sin \theta.$$

$$\text{Par identification : } \boxed{A = J_2 + J_3 + m_3 (d_2+d)^2} ; \boxed{B = f_2} ; \boxed{C = -m_3 (d_2+d) \sin \theta}.$$

1,5

Q6 :
 Les mouvements des axes 1 et 2 sont couplés car les équations différentielles (E_1) et (E_2) comportent toutes les deux des termes en x , θ et leurs dérivées.

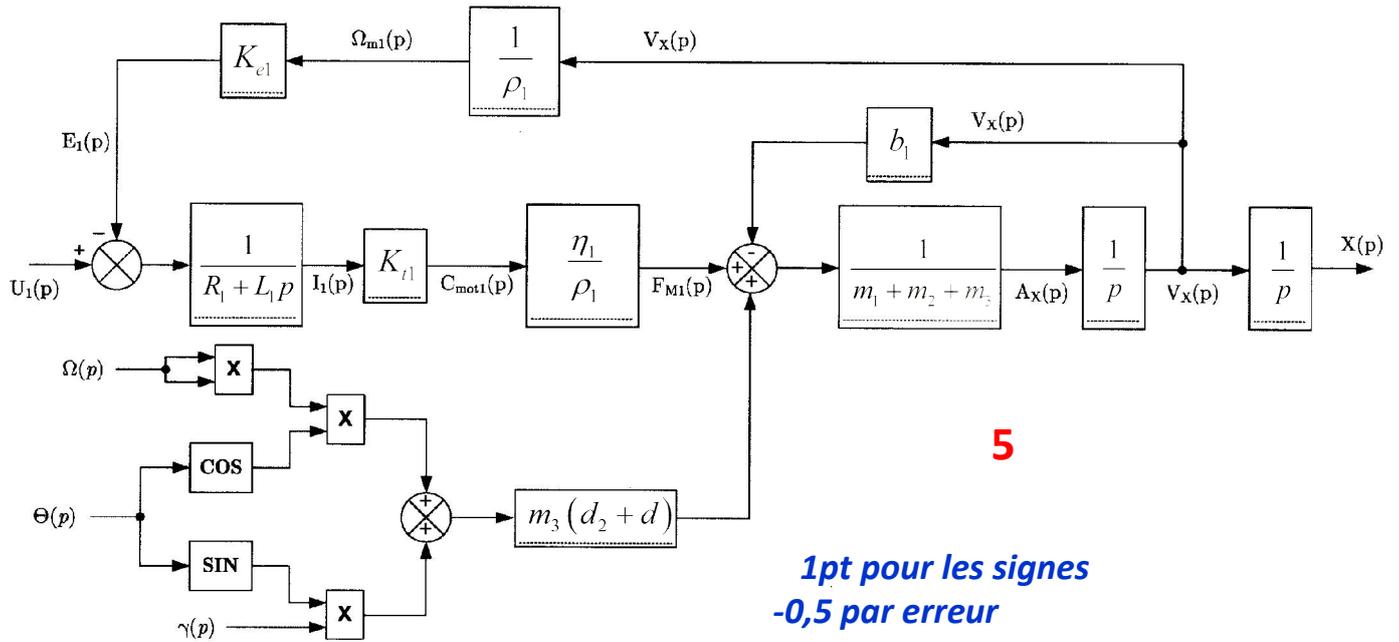
0,5

Q7 :
 Les conditions initiales sont nulles.
 Dans le domaine symbolique :

$$F_{M_1}(p) = (m_1 + m_2 + m_3)A_x(p) + b_1V_x(p) - m_3(d_2 + d) \left[L(\ddot{\theta} \sin \theta) + L(\dot{\theta}^2 \cos \theta) \right]$$

$$U_1(p) = (R_1 + L_1 p)I_1(p) + E_1(p) ; C_{mot1}(p) = K_{t1}I_1(p) ; E_1(p) = K_{e1}\Omega_{m1}(p) .$$

$$\rho_1 F_{M_1}(p) = \eta_1 C_{mot1}(p) ; V_x(p) = \rho_1 \Omega_{m1}(p) .$$



Q8 :
 Ce n'est pas la structure d'un système asservi car il n'y a pas de **capteurs** donnant en retour un signal sur l'état d'une grandeur physique (pas de feedback).
 Il n'y a asservissement que s'il a mesure et utilisation de la mesure pour corriger l'entrée.
 Les retours et comparateurs visibles ne sont que l'image d'un système d'équations mis sous forme d'un schéma blocs.

1

Q9 :
 L'accélération maximale visible sur la figure 11 est supérieure à 10 m.s^{-2} . La commande des actionneurs en chaîne directe et simultanée n'est donc pas possible sans risque de débordement.

1

Q10 :

0,5

Bonne 1pt

On isole 3, puis on applique le théorème de l'énergie cinétique : $\frac{dE_{C3/Rg}}{dt} = P_{ext \rightarrow 3/Rg}$

Énergie cinétique : $E_{C3/0} = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot \|\overline{V_{G_3,3/0}}\|^2 = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot \dot{z}^2$ (3/0 : translation de direction \vec{z}_0)

Actions extérieures : $P_{pes \rightarrow 3/0} = R_{pes \rightarrow 3} \cdot \overline{V_{G_3,3/0}} = -m_3 g \cdot \dot{z}$ **0,5**

$P_{2 \rightarrow 3/0} = \{F_{2 \rightarrow 3}\} \otimes \{V_{3/0}\} = 0$ car liaison parfaite et bâti (0, 1 et 2) fixe.

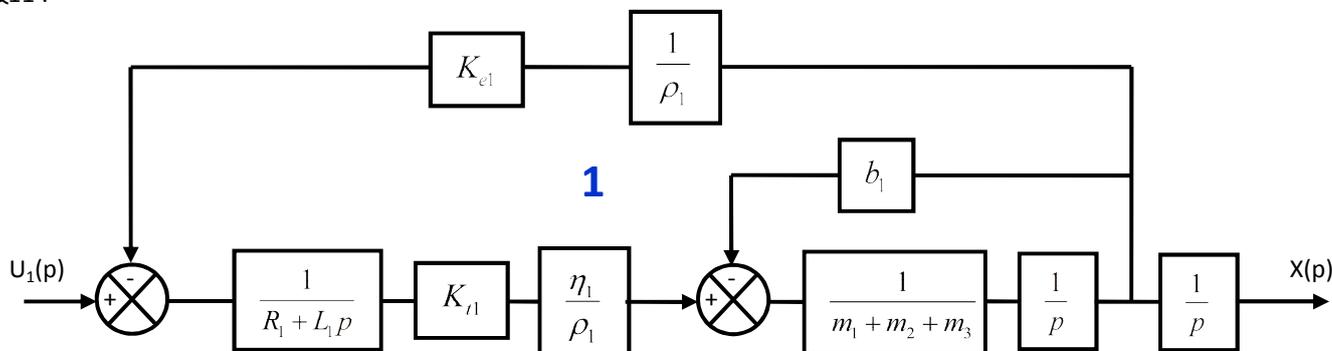
$P_{2 \rightarrow m \rightarrow 3/0} = \{F_{2 \rightarrow m \rightarrow 3}\} \otimes \{V_{3/0}\} = \begin{Bmatrix} F_{M3} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \otimes_{G_3} \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{z} \cdot \vec{z}_0 \end{Bmatrix} = F_{M3} \dot{z}$ **0,5**

$P_{2 \rightarrow frot \rightarrow 3/0} = \{F_{2 \rightarrow frot \rightarrow 3}\} \otimes \{V_{3/0}\} = \begin{Bmatrix} -b_3 \dot{z} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \otimes_{G_3} \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{z} \cdot \vec{z}_0 \end{Bmatrix} = -b_3 \dot{z}^2$ **0,5**

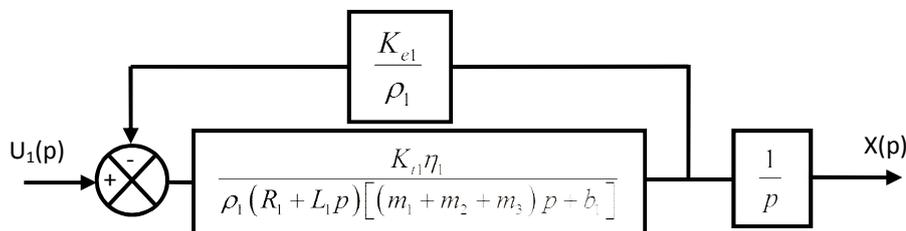
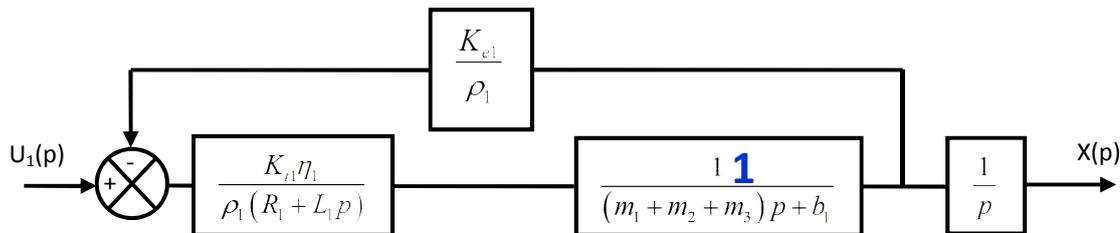
TEC : $m_3 \cdot \dot{z} \cdot \ddot{z} = -m_3 g \cdot \dot{z} + F_{M3} \dot{z} - b_3 \dot{z}^2 \Rightarrow \boxed{F_{M3} = m_3 \ddot{z} + b_3 \dot{z} + m_3 g}$ **1,5**

5

Q11 :



Ce schéma est mathématiquement équivalent à ceux-ci :



5

$$\frac{X(p)}{U_1(p)} = \frac{K_{t1} \eta_1}{p \times \left[\rho_1 (R_1 + L_1 p) [(m_1 + m_2 + m_3) p + b_1] + \frac{K_{t1} K_{e1} \eta_1}{\rho_1} \right]} = \frac{K_{t1} \eta_1 \rho_1}{p \times \left[\rho_1^2 (R_1 + L_1 p) [(m_1 + m_2 + m_3) p + b_1] + K_{t1} K_{e1} \eta_1 \right]}$$

Soit sous forme canonique :

$$\frac{X(p)}{U_1(p)} = \frac{K_{t1} \eta_1 \rho_1}{\rho_1^2 R_1 b_1 + K_{t1} K_{e1} \eta_1} \times \frac{1}{p \times \left[1 + \frac{\rho_1^2 [R_1 (m_1 + m_2 + m_3) + b_1 L_1]}{\rho_1^2 R_1 b_1 + K_{t1} K_{e1} \eta_1} p + \frac{\rho_1^2 L_1 (m_1 + m_2 + m_3)}{\rho_1^2 R_1 b_1 + K_{t1} K_{e1} \eta_1} p^2 \right]}$$

1

1

1

Q12 :

La commande séquentielle découplée des axes entraîne une accélération en bout de pince qui ne dépasse pas 10 m.s^{-2} en valeur absolue pour les axes N°1 (maximum de 7 m.s^{-2}) et N°3 (maximum de 10 m.s^{-2}) d'après la figure 12. C'est la condition pour qu'il n'y ait pas de débordement.

Q13 :

Pour une commande découplée des axes, seule l'actionneur M_2 est actif pendant le mouvement de la pince dû à l'axe N°2. Les mouvements des autres axes sont donc bloqués.

$$\overline{\Gamma}_{P/O} = \left[\frac{d^2 \left(\cancel{x}x_0 + (d_1 + z)z_0 + d_p \overline{x}_1 \right)}{dt^2} \right]_0 = d_p \left[\frac{d(\dot{\theta}z_0 \wedge \overline{x}_1)}{dt} \right]_0 = d_p \left[\frac{d(\dot{\theta}y_1)}{dt} \right]_0 = d_p \left(\ddot{\theta}y_1 + \dot{\theta}^2 z_0 \wedge y_1 \right).$$

1,5 si présence de x et z seconde

2,5

$$\Rightarrow \overline{\Gamma}_{P/O} = d_p \left(\ddot{\theta}y_1 - \dot{\theta}^2 x_1 \right).$$

La norme maximale de l'accélération est donnée pour $t = 1 \text{ s}$ où simultanément la vitesse et l'accélération de l'axe N°2 sont maximales en valeur absolue : $\dot{\theta}_{MAX} = 1,6 \text{ rad.s}^{-1}$ et $|\ddot{\theta}_{MAX}| = 11 \text{ rad.s}^{-2}$.

$$\|\overline{\Gamma}_{P/O}\|_{MAX} = d_p \sqrt{(\ddot{\theta}_{MAX})^2 + (\dot{\theta}_{MAX}^2)^2}.$$

4

$$\text{A.N. : } \|\overline{\Gamma}_{P/O}\|_{MAX} = 0,5 \times \sqrt{(11)^2 + (1,6)^4} \Rightarrow \|\overline{\Gamma}_{P/O}\|_{MAX} = 5,7 \text{ m.s}^{-2} \quad \mathbf{1}$$

Cette valeur est inférieure 10 m.s^{-2} , il n'y a donc pas de risque de débordement.

0,5

Q14 :

Étant donnée l'allure de la réponse en vitesse à un échelon, on adopte un modèle simplifié du 1^{er} ordre de la forme :

$$\frac{\Omega(p)}{U_2(p)} = \frac{K_2}{1 + \tau p}. \quad \text{Justifications tangente à l'origine, absence de dépassement et correspondance avec les 63\%} \quad \mathbf{1,5}$$

$$\text{Pour la valeur finale la plus faible : } K_2 = \frac{\dot{\theta}(\infty)}{6,5} = \frac{57}{6,5} \Rightarrow \boxed{K_2 = 8,8 \text{ s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}} \text{ ou } \boxed{K_2 = 0,15 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}}$$

3

$$\dot{\theta}(\tau) = 63\% \times \dot{\theta}(\infty) = 36 \text{ s}^{-1} \text{ et donc } \boxed{\tau = 0,25 \text{ s}}.$$

$$\text{De plus, } \frac{\Theta(p)}{U_2(p)} = \frac{1}{p} \times \frac{\Omega(p)}{U_2(p)} = \frac{K_2}{p(1 + \tau p)}.$$

0,5

Q15 :

0,5

Les variations de position finale sont supérieures à 1° (ici plus de 15°), le cahier des charges n'est donc pas respecté.

Ces différences de comportement sont dues à des actions perturbatrices variables qui agissent sur le système. Elles sont par ailleurs non modélisées sur le schéma blocs.

0,5

Le système n'est pas asservi et perturbé, il ne peut donc faire preuve d'une bonne répétabilité.

1,5

0,5

Q16 :

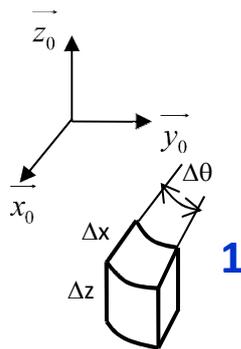
On peut boucler le système afin d'améliorer la précision avec un retour d'information sur la position angulaire (capteur de position (ex : codeur incrémental)), à comparer avec la consigne.

+0,5

1

Q17 :
 Pour le bon positionnement du tube dans un trou du plateau, la performance à prendre en compte est la précision : l'écart statique en position doit être minimal sur chacun des axes.

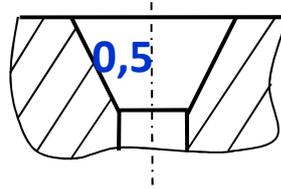
0,5



1

$\Delta x = 2 \text{ mm} ; \Delta z = 4 \text{ mm} ; \Delta \theta = 2^\circ$.

Partie supérieure du trou fraisurée afin de guider le centrage du tube dans son logement :



2

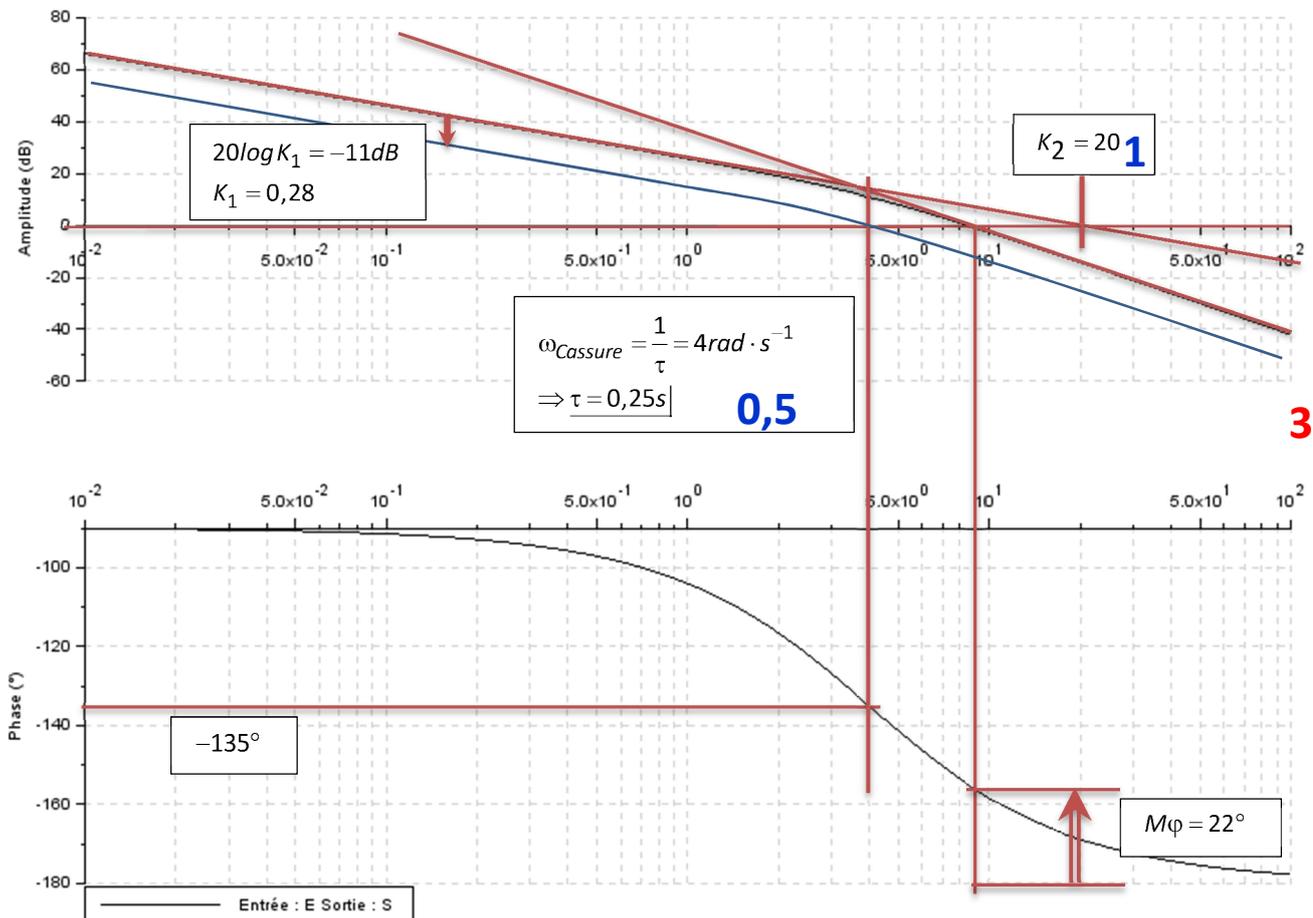
Q18 :
 Identification (voir les tracés page suivante) :

- pour $\omega \rightarrow 0$, pente à -20dB/décade et phase à -90° , on identifie un intégrateur.
 L'intégrateur seul coupe l'horizontale à 0dB pour $\omega = K_2 = 20 \text{ rad/s}$
 - pour $\omega \rightarrow \infty$, pente à -40dB/décade et phase à -180° , on identifie un premier ordre associé à l'intégrateur.
- Au point de rencontre des asymptotes et à $\varphi = -135^\circ$ on trouve la cassure $\omega_{\text{cassure}} = \frac{1}{\tau} = 4 \text{ rad/s} \Rightarrow \tau = 0,25\text{s}$.

1

$$G(p) = \frac{K_2}{p \cdot (1 + \tau \cdot p)} = \frac{20}{p \cdot (1 + 0,25 \cdot p)}$$

0,5 Forme de la FT



0,5

3

Q19 :

$\varphi(\omega) > 180^\circ$ donc la marge de gain est infinie : $M_G = \infty$.

La marge de phase est alors $M_\varphi \approx 22^\circ$.

*Ou (et)***1**

Le système est donc stable en boucle fermée.

Q20 : **0,5**

Il y a une intégration dans la boucle, un retour unitaire, le gain de la FTBF sera égal à 1.

Pas de perturbations modélisées valeur finale sera donc l'écart statique est nul : $\varepsilon_s = 0^\circ$.

La valeur finale sera donc égale à la consigne θ_0 . Le cahier des charges est donc respecté ($< 1^\circ$).

0,5**1,5**

Q21 :

On résout $\frac{20 \times K_1}{\omega \cdot \sqrt{1 + (0,25 \cdot \omega)^2}} = 1$ pour $\omega = 4 \text{ rad/s}$

*0,5 si K1 graphique**0,5 si Mφ graphique*

donc $K_1 = \frac{4 \cdot \sqrt{1 + (0,25 \cdot 4)^2}}{20} = \frac{\sqrt{2}}{5} \Rightarrow K_1 = 0,28$

1,5

soit

$$20 \log K_1 = -11 \text{ dB}$$

4

$M_\varphi = 180 + \varphi = 180 - 90 - \arctan(0,25 \cdot 4) = 45^\circ$

1

Le cahier des charges exige 60° de marge. Il n'est donc pas satisfait.

0,5

Q22

L'action correctrice doit permettre d'améliorer la stabilité en augmentant la marge de phase de 15° au moins.

0,5

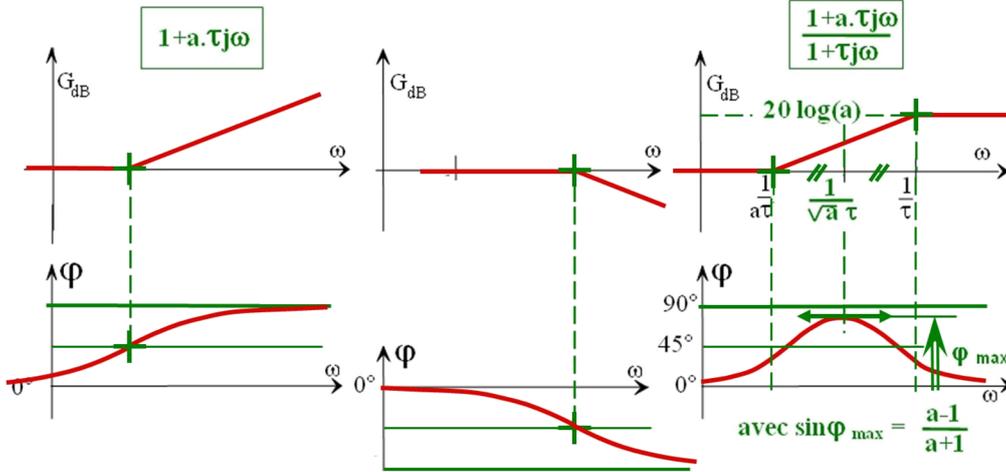
0,5

1

Q23

Réseau à avance de phase.

$$\frac{1+a \cdot \tau j \omega}{1+\tau j \omega} \text{ avec } a > 1$$

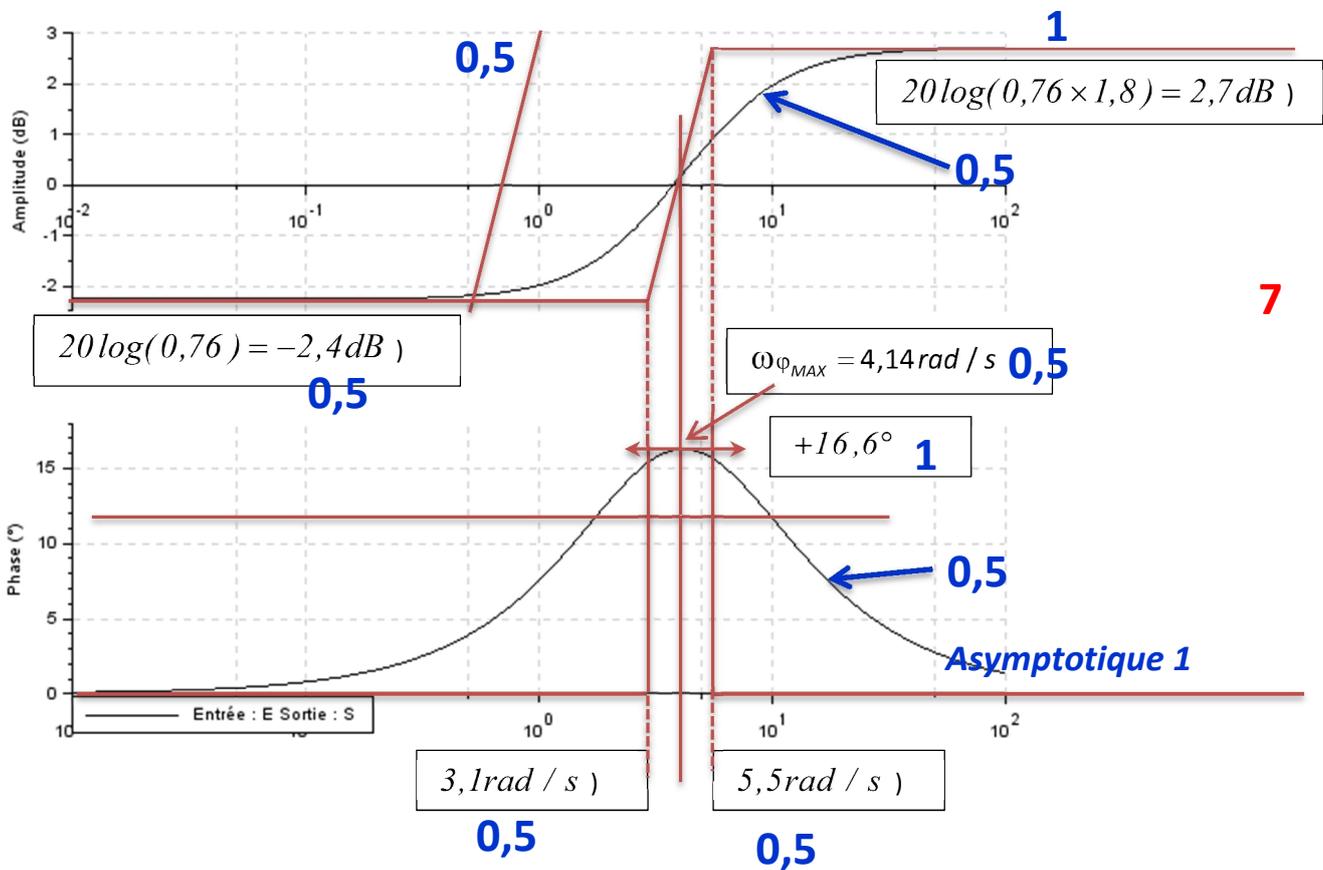


Il s'agit donc d'un correcteur à avance de phase.

0,5

Valeur de la pulsation pour laquelle la valeur est maximale : $\omega_{\phi_{MAX}} = \frac{1}{\sqrt{a \cdot \tau}} = 4,14 \text{ rad / s}$

$$\phi_{MAX} = \text{Arcsin}\left(\frac{a-1}{a+1}\right) = 16,6^\circ$$



7

Q24

$$|G(4)| = \frac{0,76 \cdot \sqrt{1 + (1,8 \cdot 0,18 \cdot 4)^2}}{\sqrt{1 + (0,18 \cdot 4)^2}} \Rightarrow \boxed{|G(4)| = 1} \quad \text{soit} \quad \boxed{20 \log |G(4)| = 0 \text{ dB}} \quad \mathbf{2}$$

Le gain de la fonction corrigé restera donc le même qu'avant correction pour cette pulsation $\omega = 4 \text{ rad/s}$.

Il vaudra donc toujours 0 dB .

1

Q25 :

$$\varphi(4) = \arctan(1,8 \cdot 0,18 \cdot 4) - \arctan(0,18 \cdot 4) = \boxed{16,2^\circ} \quad \mathbf{1}$$

Très légèrement inférieure à la valeur maximale.

On déterminera donc la nouvelle marge de phase pour $\omega = 4 \text{ rad/s}$

3

$$M\varphi_{\text{systcorrigé}} = 45^\circ + 16,2^\circ = 61,2^\circ \quad \mathbf{2}$$

Q26

Performance	Critères CDC	Système corrigé	Validation
Stabilité	$M\varphi \geq 60^\circ$	$M\varphi = 61,2^\circ$	Oui
Rapidité	$\omega_u \geq 4 \text{ rad.s}^{-1}$	$\omega_u = 4 \text{ rad.s}^{-1}$	Oui
Précision	Erreur inférieure à 1°	Erreur nulle	Oui

3

Le cahier des charges est donc validé.

0,5

Q27 :

Aux vues des tracés proposés figure 18, la commande est robuste car on observe peu de changement de comportement dans la phase transitoire (rapidité) et aucun en régime permanent, pour des variations de masse de $\pm 10\%$.

Les performances en termes de précision et de stabilité sont donc conservées.

La commande peut être considérée comme robuste.

1,5**0,5****0,5**

Q28 :

